SOBRE UNA CLASE DE TRANSFORMACIONES DE LOS ALGORITMOS DE SUMACIÓN DE LAS SERIES ANALÍTICAS

POR

F. SUNYER BALAGUER

ÍNDICE

Los algoritmos de sumación de series analíticas se componen de un conjunto de operaciones verificadas sobre la variable y los coeficientes de la serie (1). Entre estas operaciones figuran 1, 2, 3 ó más pasos al límite (2); por lo tanto, representaremos los métodos de sumación por expresiones de la forma

$$\lim_{P=q} \dots \lim_{n=\infty} \Psi_{p,\dots,n}(z, a_0, \dots, a_n),$$

donde z es un punto interior al dominio de validez del algoritmo, que nosotros supondremos que es la estrella A de MITTAG-LEFFLER, y los a_n son los coeficientes de la serie a la cual se aplica el algoritmo de sumación.

Si el punto $z = 1$ es interior a la estrella A y ponemos

$$z = 1, \qquad a_n = c_n(x, \varepsilon, \alpha, \dots, b_0, \dots, b_k), \qquad k = k(n),$$

(1) Véase, p. ej., A. BUHL: Series analytiques. Sommabilité (Mem. des Sci. Mat. fas. VII, 1925).

(2) En las representaciones de los algoritmos de sumación supondremos que las expresiones $\sum\limits_{\theta}^{\infty}$ están escritas en la forma $\lim\limits_{n=\infty} \sum\limits_{0}^{n}$.

donde ε, α, ..., son parámetros, puede resultar que, según la naturaleza de las funciones c_n resulte un nuevo algoritmo de sumación que dé los valores de la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

en cierto dominio variable con los parámetros y que al tender éstos a ciertos límites, puede tender a convertirse en la estrella A.

Existen varios procedimientos para encontrar unas expresiones c_n de modo que cumplan estas condiciones. En este trabajo nos proponemos estudiar con todo detalle una clase de estas transformaciones, de la cual ya estudiábamos un caso particular en una nota aparecida en los C. R. de la Academia de Ciencias de París. (1)

En esta memoria, si $f(x)$ es una función analítica, de la cual

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

representa un elemento, con la notación $f_A(x)$ indicaremos la rama de f obtenida prolongando analíticamente f_0 en el interior de la estrella A de f_0.

Además, como habitualmente, si D y D_1 representan dos conjuntos de puntos, representaremos por $D + D_1$ el conjunto formado por los puntos que pertenecen al menos a uno de ellos. De modo semejante, si todos los puntos de D_1 pertenecen a D, la notación $D - D_1$ representará el conjunto de los puntos que pertenecen a D sin pertenecer a D_1.

Son tantas las atenciones que vengo recibiendo de mi distinguido amigo el Dr. D. José María Orts, que es para mí un agradable deber expresarle públicamente, y una vez más, mi sincero agradecimiento.

I

EXPOSICIÓN GENERAL DE LA CLASE DE TRANSFORMADORES

1. Designemos por $\Delta(\varepsilon, \alpha)$ el rectángulo formado por los puntos que verifican las desigualdades

$$-\alpha < \Re[z] < 1 + \alpha, \qquad -\varepsilon < I[z] < \varepsilon,$$

(1) F. Sunyer Balaguer: Sur une classe de transformations des formules de sommabilité. (C. R. Acad. des sci. de Paris T. 208 p. 409-411, 1939).

donde $\Re[z]$ y $I[z]$ representan, respectivamente, la parte real y la imaginaria de z. Después de esto, supongamos dada una familia de funciones tal, que a cualquier par de números $\varepsilon > 0$ y $\alpha > 0$ corresponda una función $\Phi(t;\varepsilon,\alpha)$ de la familia, con las siguientes propiedades :

I) $\Phi(t;\varepsilon,\alpha)$ es una función de t, holomorfa en todos los puntos reales tales que $0 \leqslant t \leqslant 1$.

II) Cuando t es real y verifica las desigualdades $0 \leqslant t \leqslant 1$ el valor de $\Phi(t;\varepsilon,\alpha)$ es interior a $\Delta(\varepsilon,\alpha)$. Además, la ecuación

$$\Phi(t;\varepsilon,\alpha) - 1 = 0$$

no tiene ninguna raíz real t_1, tal que $0 \leqslant t_1 \leqslant 1$.

III) $\Phi(0;\varepsilon,\alpha) = \Phi(1;\varepsilon,\alpha) = 0$.

IV) El argumento de $\Phi(t;\varepsilon,\alpha) - 1$ crece de 2π, cuando t describe el segmento (0,1), es decir, la curva que describe $\Phi(t;\varepsilon,\alpha)$ rodea una sola vez el punto 1 en sentido positivo.

Es casi innecesario demostrar la existencia de tales familias, pero si a pesar de su evidencia, se desea demostrarla, basta considerar el ejemplo siguiente :

$$\Phi(t;\varepsilon,\alpha) = \frac{1 - \dfrac{\cos(2\pi t - i\varepsilon)}{\cos i\varepsilon}}{2 - \alpha}$$

que es precisamente el caso particular que estudiábamos en nuestra nota de los C. R. citada anteriormente.

De momento supondremos que $\Phi(t;\varepsilon,\alpha)$ es completamente general y que solamente está condicionada por las cuatro propiedades anteriores.

2. Sea :

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

un elemento de la función analítica $f(x)$; el radio de convergencia r_0 de f_0 lo supondremos > 0 pero completamente arbitrario por lo demás.

La propiedad III de Φ, juntamente con la I, demuestra que

$$f_0(x\Phi(t;\varepsilon,\alpha))$$

es holomorfa en

$$|t| < R_0 > 0$$

donde R_0 depende únicamente de r_0, x, α y ε.

De esto resulta la existencia de un valor $R_1 > 0$, que depende, asimismo, tan sólo de r_o, x, ε y α, tal que, en el círculo $|t| < R_1$, la función

$$f_o(x\Phi(t;\varepsilon,\alpha))\frac{\Phi'(t;\varepsilon,\alpha)}{\Phi(t;\varepsilon,\alpha)-1}$$

es holomorfa, puesto que, según las propiedades I y II de Φ, existe un círculo centrado en el origen en el cual Φ no toma nunca el valor 1.

Un teorema elemental demuestra, pues, que la integral

$$F(z;x,\varepsilon,\alpha,f)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^z f(x\Phi(t;\varepsilon,\alpha))\frac{\Phi'(t;\varepsilon,\alpha)}{\Phi(t;\varepsilon,\alpha)-1}dt,$$

calculada siguiendo el camino rectilíneo, es una rama de función analítica, y que esta rama es holomorfa en el círculo

$$|z| < R_1$$

Naturalmente, en esta integral $f(x\Phi(t;\varepsilon,\alpha))$ representa el valor obtenido prolongando $f_o(x\Phi(t;\varepsilon,\alpha))$ a lo largo del camino de integración.

Representando por $x\Delta(\varepsilon,\alpha)$ el dominio obtenido multiplicando por x todos los puntos del dominio $\Delta(\varepsilon,\alpha)$, resulta, según la propiedad II, que, cuando t describe el segmento (0,1), la función

$$x\Phi(t;\varepsilon,\alpha)$$

toma solamente valores interiores al dominio $x\Delta(\varepsilon,\alpha)$; por lo tanto, si x es interior a la estrella rectilínea de holomorfía de f_o, según las propiedades I y II, el punto $z = 1$ será, por valores suficientemente pequeños de ε y de α, interior a la estrella rectilínea de holomorfía de $F(z;x,\varepsilon,\alpha,f)$. Por otra parte, para estos mismos valores suficientemente pequeños de ε y de α, la fórmula de Cauchy, recordando las condiciones III y IV, nos permite escribir la igualdad siguiente:

$$f_\Delta(x) = F(1;x,\varepsilon,\alpha,f)$$

Por lo tanto, siempre que x sea interior a la estrella A o estrella rectilínea de holomorfia de f_o tendremos :

$$(1) \qquad f_A(x) = \lim_{\varepsilon=0} \lim_{\alpha=0} F(1\,;\, x, \varepsilon, \alpha, f)$$

3. Según lo dicho en el número anterior, podremos escribir, para $|z| < R_1$,

$$F(z\,;\, x, \varepsilon, \alpha, f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

con

$$a_n = a_n(x, \varepsilon, \alpha, f) = \sum_{k=0}^{n-1} h_{n,k}(\varepsilon, \alpha)\, b_k\, x^k,$$

donde las $h_{n,k}(\varepsilon, \alpha)$ son independientes de f y de x.

Cuando se conoce el desarrollo de TAYLOR de $\Phi(t\,;\,\varepsilon, \alpha)$, teóricamente resulta fácil la obtención de las $h_{n,k}(\varepsilon, \alpha)$, pero, generalmente, la expresión de las mismas en función de ε y α resulta prácticamente muy complicada. Con todo, más adelante estudiaremos un caso particular en el cual, y debido en parte a que solamente nos interesa conocer los valores de $h_{n,k}(0,0)$, la obtención de estos valores resulta muy simplificada.

Los valores de la función $F(z\,;\, x, \varepsilon, \alpha, f)$ en el interior de su estrella A de MITTAG-LEFFLER pueden calcularse mediante cualquier fórmula de sumación válida en dicha estrella ; sea, pues,

$$\lim_{p=q} \ldots \lim_{n=\infty} \Psi_{p,\ldots,n}(z\,;\, a_o, \ldots, a_n)$$

uno de estos algoritmos de sumación. Según hemos dicho, si x es interior a la estrella A de f_o y para ε y α suficientemente pequeñas, el punto $z = 1$ será interior a la estrella A de F, y, por lo tanto, para estos mismos valores de x, de ε y de α, podremos escribir :

$$F(1\,;\, x, \varepsilon, \alpha, f) = \lim_{p=q} \ldots \lim_{n=\infty} \Psi_{p,\ldots,n}(1\,;\, a_o, \ldots, a_n)$$

Recordando que las a_n son funciones de $\varepsilon, \alpha, x, b_o, \ldots, b_{n-1}$ y substituyendo en las Ψ se obtienen las funciones β, tales que :

$$\beta_{p,\ldots,n}(x\,;\, \varepsilon, \alpha, b_o, \ldots, b_{n-1}) = \Psi_{p,\ldots,n}(1\,;\, a_o, \ldots, a_n)$$

y aplicando la (1), resulta :

$$f_A(x) = \lim_{\varepsilon=0} \lim_{\alpha=0} \lim_{p=q} \ldots \lim_{n=\infty} \beta_{p,\ldots,n}(x\,;\varepsilon, \alpha, b_0, \ldots, b_{n-1})$$

válida siempre que x sea interior a la estrella A de f_0.

Hemos obtenido, pues, a partir de un método de sumación aplicable en el interior de la estrella A otro algoritmo de sumación aplicable asimismo en esta misma estrella. Es verdad que este segundo método es más complicado en cuanto al número de pasos al límite, pues contiene dos más que el primitivo ; pero resulta evidente que, si tomamos ε y α de forma que dependan de una sola variable, podremos reunir los dos límites introducidos en uno solo.

Además, según demostraremos en el número siguiente, resulta posible, para algunos métodos Ψ, la obtención por este procedimiento de un método β en el cual es posible la reunión de todos los pasos al límite en uno solo, y esto de forma completamente independiente de f. [1]

4. Para comprobar la posibilidad de lo que acabamos de indicar, aplicaremos la transformación objeto de nuestro trabajo a un procedimiento de Mittag-Leffler [2] y, a pesar que la demostración de la posibilidad de la reunión de los diferentes pasos al límite sigue el curso clásico en estos temas, la daremos con algún detalle, a fin de que sobresalga con más claridad la independencia del procedimiento respecto a la función f.

Vamos a demostrar, pues, que, aplicando nuestra transformación al procedimiento de Mittag-Leffler, resulta un algoritmo β en el cual es posible la reunión de los tres pasos al límite obteniéndose una sucesión de polinomios

$$\sum_{n=0}^{\varphi(k)} L(n, k)\, b_n\, x^n,$$

donde los $L(n, k)$ pueden darse a priori completamente independientes de f y de x y de forma que estos polinomios converjan hacia $f_A(x)$, en todo punto interior a la estrella A de f_0, cuando k tiende al infinito.

---

(1) Sería fácil construir un algoritmo de sumación Ψ cuyo algoritmo β tiene la propiedad de que es imposible reunir todos los pasos al límite de una forma independiente de f ; pero este algoritmo Ψ resulta muy artificioso.

(2) Mittag-Leffler : Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène (Acta Math. T. 23 p. 43-62, 1899).

En efecto, tomemos dos sucesiones ε_k y α_k tales que

$$\lim_{k=\infty} \varepsilon_k = 0 \qquad \lim_{k=\infty} \alpha_k = 0$$

Sea d_k un número tal que, si t es un punto cualquiera cuya distancia al intervalo (0,1) es inferior a d_k,

$$\Phi\,(t\,;\,\varepsilon_k,\,\alpha_k)$$

es holomorfa y la ecuación

$$\Phi\,(t\,;\,\varepsilon_k,\,\alpha_k) - 1 = 0$$

no es satisfecha. Desplacemos el centro de un círculo de radio $\frac{d_k}{2}$ a lo largo del segmento (0,1), la reunión de la totalidad de estos círculos forma un dominio D_k tal, que, cuando t es interior a él, se cumple la desigualdad

$$|\Phi\,(t\,;\,\varepsilon_k,\,\alpha_k) - 1| > \eta_k > 0,$$

donde η_k depende únicamente de k.

Supongamos, además, que los valores de d_k han sido tomados suficientemente pequeños para que, cuando k tiende al infinito, el dominio formado por los valores de $\Phi\,(t\,;\,\varepsilon_k,\,\alpha_k)$ cuando t toma la totalidad de los valores de D_k, tienda a convertirse en el segmento (0,1) y siempre $d_k < 2$.

Con esta condición se ve que, si x es interior a la estrella A de f_0, a partir de un valor de k que depende de x, la

$$f\,(x\,\Phi\,(t\,;\,\varepsilon_k,\,\alpha_k))$$

será una función de t, holomorfa en el dominio D_k. Representemos por M_k el máximo de

$$|f\,(x\,\Phi\,(t\,;\,\varepsilon_k,\,\alpha_k))|,$$

cuando t pertenece a D_k y por M_k^1 el máximo de

$$|\,\Phi'\,(t\,;\,\varepsilon_k,\,\alpha_k)|$$

en el mismo dominio; con estas notaciones resulta, según la definición, que, si z es interior a D_k,

$$|F(z\,;\,x,\varepsilon_k,\alpha_k,f)| = \left(1+\frac{d_k}{2}\right)\frac{M_k^1 M_k}{\eta_k} < 2\,\frac{M_k^1 M_k}{\eta_k}.$$

De lo anterior resulta, según los cálculos de Mittag-Leffler, que si m_k es un entero que satisface a las desigualdades

$$\text{(2)} \qquad e^{\frac{1}{\omega(m_k)}} < 1+\frac{d_k}{2}, \qquad e^{\frac{1}{\omega(m_k)}} < m_k\frac{d_k}{2},$$

donde $\omega(m_k)$ es la función representada por la misma notación en la memoria de Mittag-Leffler, entonces

$$|F(1\,;\,x,\varepsilon_k,\alpha_k,f) - g_{m_k}(1\,;\,x,\varepsilon_k,\alpha_k,f)| < c\,\frac{M_k^1\,M_k}{\eta_k\,\omega(m_k)}$$

donde c es una constante independiente de k y g_{m_k} es el polinomio de Mittag-Leffler de F, es decir:

$$g_{m_k}(z\,;\,x,\varepsilon,\alpha,f,) = \sum_{\lambda_1=0}^{m_k^2}\cdots\sum_{\lambda_{m_k}=0}^{m_k^{2m_k}}\frac{(\lambda_1+\ldots+\lambda_{m_k})!}{\lambda_1!\ldots\lambda_{m_k}!}\,a_{\lambda_1+\ldots+\lambda_{m_k}}(x,\varepsilon_k,\alpha_k,f)\left(\frac{z}{m_k}\right)^{\lambda_1+\ldots+\lambda_m}$$

o sea:

$$g_{m_k}(1\,;\,x,\varepsilon_k,\alpha_k,f) = \sum_{n=0}^{\varphi(k)} L(n,k)\,b_n\,x^n,$$

donde $L(n,k)$ dependen únicamente de n, ε_k, α_k y m_k, y

$$\varphi(k) = m_k^2+\ldots+m_k^{2m_k}-1$$

Si, además de satisfacer a las (2), la sucesión de las m_k verifica

$$\text{(3)} \qquad \lim_{k=\infty}\frac{M_k^1}{\eta_k\,\omega(m_k)} = 0$$

la sucesión de los polinomios $g_{m_k}(1; x, \varepsilon_k, \alpha_k, f)$ convergen hacia $f_A(x)$ y, además, esta convergencia es uniforme en todo dominio finito interior a la estrella A de f_o.

En efecto, sea E el dominio en cuestión y E_1 una estrella finita cualquiera interior a la estrella A de f_o y que contiene en su interior al dominio E. Si x es un punto de E, a partir de un valor de k, independiente de x, los valores de

$$x\,\Phi(t; \varepsilon_k, \alpha_k)$$

serán interiores a E_1, para todo valor de t interior a D_k.

Por lo tanto, a partir de este mismo valor de k, tendremos:

$$f_A(x) = F(1; x, \varepsilon_k, \alpha_k, f),$$

y

$$M_k \leqq M,$$

donde M representa el máximo de $|f_A(x)|$ en E_1. En consecuencia,

$$|f_A(x) - g_{m_k}(1; x, \varepsilon_k, \alpha_k, f)| < c\,M \frac{M_k^1}{\eta_k\,\omega(m_k)};$$

como sea que el segundo miembro de esta desigualdad es independiente de x y, según la (3), tiende a cero, nuestra afirmación resulta demostrada.

Puesto que d_k, M_k^1 y η_k son independientes de f, también podrá elegirse la sucesión m_k, verificando las (2) y la (3), de modo completamente independiente de f, y, por tanto, los $L(n, k)$ serán también completamente independientes de f, es decir, la ley de formación de los polinomios g_{m_k} puede fijarse a priori, y con sólo poner los b_n correspondientes permitirá la sumación de la serie de Taylor correspondiente a cualquier función.

II

INTRODUCCIÓN DE NUEVAS CONDICIONES RESTRICTIVAS PARA LA FAMILIA DE LAS Φ

5. En la sección anterior hemos visto que, cuando x es interior a la A de f_o, la expresión

$$(4)\qquad \lim_{\varepsilon=0}\lim_{\alpha=0}\lim_{p=q}\dots\lim_{n=\infty}\beta_{p,\dots,n}(x; \varepsilon, \alpha, b_o, \dots, b_{n-1})$$

existe y coincide con el valor de $f(x)$ obtenido prolongando analíticamente f_0 hasta x siguiendo la recta que une el origen con x. Nada podemos afirmar sobre el comportamiento de esta expresión en los puntos frontera o exteriores a la A de f_0.

No obstante, si suponemos que la familia de las Φ, además de satisfacer a las cuatro condiciones del número 1, cumple también otras condiciones apropiadas, podrá resultar que la expresión (4) exista también en puntos de la frontera de A, si bien, según la clase de condiciones impuestas a Φ, podrá en estos puntos no coincidir con ningún valor que pertenezca a una rama de las posibles de $f(x)$. Unos ejemplos aclararán estas consideraciones.

Supongamos, en primer lugar, que, además de satisfacer a las cuatro condiciones repetidamente señaladas, la familia de las Φ cumpla la

V_1) Cualquiera que sea el valor real y con tal que $\alpha \leqslant y \leqslant 1$ la ecuación en t,

$$\Phi(t\,;\,\varepsilon,\alpha) - y = 0$$

no posee ninguna raíz real t_2 que verifique $0 \leqslant t_2 \leqslant 1$.

Consideremos ahora un segmento rectilíneo l que forme parte de la frontera de la estrella A de f_0 y que satisfaga a las tres condiciones siguientes:

a) Existe un dominio que contiene l en su interior y cuyos puntos, o son interiores a la estrella A de f_0, o bien pertenecen a la recta de la cual forma parte el segmento l.

b) Se puede prolongar f_A a través de l por un punto cualquiera de este segmento y siguiendo el sentido en que crece el argumento de x.

c) Mediante el prolongamiento anterior vuelve a encontrarse la misma rama $f_A(x)$.

Sean r_1 y r_2 el máximo y el mínimo, respectivamente, de los módulos de los puntos pertenecientes a l y θ_1 el argumento de estos mismos puntos; recordando que r_0 es el radio de convergencia de f_0, las condiciones a, b y c, nos permiten afirmar, que, siendo c_0 el círculo

$$|x| < r_0,$$

$s(\eta)$ el dominio angular definido por

$$0 < |x| \leqslant r_1, \qquad \theta_1 - \eta < \arg x < \theta_1 + \eta$$

y l_1 el segmento de recta definido por

$$\arg x = \theta_1, \qquad r_o \leqslant |x| < r_2,$$

existe un η_o tal, que f_A es holomorfa y uniforme en el dominio

$$c_o + s(\eta_o) - l_1$$

Por tanto, si x es un punto interior al segmento rectilíneo l, y si ε y α verifican

$$(5) \quad |x|\,\varepsilon < r_o \operatorname{sen} \eta_o, \quad |x|\sqrt{\varepsilon^2 + \alpha^2} < r_o, \quad |x|^2(2\alpha + \alpha^2 + \varepsilon^2) < r_1^2 - |x|^2,$$

las condiciones II y V_1 demuestran que la curva descrita por

$$x\,\Phi\,(t\,;\,\varepsilon, \alpha)$$

cuando t describe el intervalo (0,1), es interior al dominio

$$c_o + s(\eta_o) - l_1$$

y recordando la I, que el punto $z = 1$ es interior a la estrella A de $F(z\,;\,x, \varepsilon, \alpha, f)$.

Además, aplicando la IV y la V_1, se demuestra que la curva descrita por

$$x\,\Phi\,(t\,;\,\varepsilon, \alpha)$$

rodea una sola vez y en sentido positivo cualquier punto interior al segmento l_1; de esto resulta que si ε_1 y α_1, y ε_2 y α_2 son dos pares que verifican las (5), recordando la condición III, tendremos :

$$(6) \qquad F(1\,;\,x, \varepsilon_1, \alpha_1, f) = F(1\,;\,x, \varepsilon_2, \alpha_2, f),$$

y, por lo tanto, la expresión

$$(4) \qquad \lim_{\varepsilon = 0}\,\lim_{\alpha = 0}\,\lim_{p = q}\,\ldots\,\lim_{n = \infty}\,\beta_{p,\ldots,n}(x\,;\,\varepsilon, \alpha, b_o, \ldots, b_{n-1})$$

no carece de sentido, pero puede, según la clase de puntos singulares que f_o tiene en el segmento l_1, no coincidir con $f_A(x)$, cuando x pertenece al segmento l de la frontera de A.

Por ejemplo, si en los razonamientos anteriores suponemos que $f_0(x)$ es la función

$$\frac{1}{1-x},$$

la expresión (4), donde se pone $b_n = 1$, representará

$$\frac{1}{1-x}$$

siempre que x no tome un valor real igual o superior a 1 ; mientras que, si x es real e igual o superior a 1, la expresión (4) toma el valor cero; como fácilmente puede deducirse apoyándose en un teorema clásico sobre los residuos de las funciones racionales. En una nota al final de un libro de BOREL (¹), P. PAINLEVE ya obtiene unos algoritmos de sumación que, aplicados a ciertas funciones, convergen hacia cero en una parte de la frontera de la estrella A, pero, PAINLEVE los obtiene aplicando dichos procedimientos a funciones multiformes y basándose en que son multiformes, por ejemplo, a

$$\sqrt{1-x}\,;$$

siendo así que la función

$$\frac{1}{1-x}$$

es uniforme en todo el plano complejo.

6. Si en la V_1 al definir los valores y que Φ no toma, se hubiese supuesto solamente

$$\alpha \leqslant y \leqslant 1-\alpha$$

en lugar de

$$\alpha \leqslant y \leqslant 1$$

no hubiésemos podido afirmar que los puntos interiores a l_1 fuesen rodeados una sola vez, puesto que, en este caso, entre el punto 1 y los puntos y quedaría un intervalo de longitud α, y, por lo tanto, la curva descrita

(¹) BOREL: Leçons sur les Fonctions de variables réelles. Nota de PAINLEVÉ: Sur le développement des fonctions analytiques.

por Φ podría rodear una sola vez el punto 1 y al mismo tiempo rodear los puntos y un número cualquiera de veces, ya sea en sentido positivo o en sentido negativo, o, finalmente, no rodearlos ni una sola vez. Por lo tanto, como sea que al variar ε y α puede variar el número de veces que la curva rodea estos puntos, no puede, en este caso, considerarse satisfecha la (6). Pero aún en este caso, y variando la función F a que hemos aplicado el algoritmo Ψ, podremos obtener resultados cuando x sea un punto de la frontera de la A de f_0.

En efecto, supongamos que la familia de las Φ, además de las cuatro condiciones del n.° 1, cumpla la V_1 modificada como acabamos de exponer, es decir, supongamos que sea satisfecha la condición

V_2) Cualquiera que sea el punto real y con tal que $\alpha \leqslant y \leqslant 1 - \alpha$ la ecuación en t

$$\Phi(t\,;\,\varepsilon,\,\alpha) - y = 0$$

no posee ninguna raíz real t_2 tal que $0 \leqslant t_2 \leqslant 1$.

De la misma forma que en el n.° 2 se establece que F es holomorfa en el círculo $|z| < R_1$, es posible demostrar que en este mismo círculo la función

$$F_1(z\,;x,\varepsilon,\alpha,f) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^z \left[f(x\Phi(t\,;\varepsilon,\alpha))\frac{\Phi'(t\,;\varepsilon,\alpha)}{\Phi(t\,;\varepsilon,\alpha)-1} - f\left(\frac{x\Phi(t\,;\varepsilon,\alpha)}{1+2\alpha}\right)\frac{\dfrac{\Phi'(t\,;\varepsilon,\alpha)}{1+2\alpha}}{\dfrac{\Phi(t\,;\varepsilon,\alpha)}{1+2\alpha}-1}\right] dt$$

es holomorfa, donde la integral está calculada a lo largo del camino rectilínco.

Como en el n.° 3, definamos las $a_n^{(1)}(x,\varepsilon,\alpha,f)$ por

$$F_1(z\,;x,\varepsilon,\alpha,f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} z^n$$

y lo mismo que anteriormente para las a_n, tendremos para las $a_n^{(1)}$ la fórmula

$$a_n^{(1)}(x,\varepsilon,\alpha,f) = \sum_{k=0}^{n-1} h_{n,k}^{(1)}(\varepsilon,\alpha)\, b_k x^k \qquad (a_0^{(1)} = 0)$$

donde las $h_{n,k}^{(1)}(\varepsilon,\alpha)$ son independientes de x y de f.

Si x pertenece al interior de la estrella A de f_0, siguiendo paso a paso las mismas demostraciones que en la sección I, se demuestra que el punto $z = 1$ es interior a la estrella A de F_1 y que

$$f_A(x) = \lim_{\varepsilon=0} \lim_{\alpha=0} F_1(1\,; x, \varepsilon, \alpha, f)$$

esto puede demostrarse también a partir de la identidad

$$F_1(z\,; x, \varepsilon, \alpha, f) = F(z\,; x, \varepsilon, \alpha, f) - \frac{1}{2\pi i}\int_0^z f\left(\frac{x\,\Phi(t\,; \varepsilon, \alpha)}{1+2\alpha}\right) \frac{\dfrac{\Phi'(t\,; \varepsilon, \alpha)}{1+2\alpha}}{\dfrac{\Phi(t\,; \varepsilon, \alpha)}{1+2\alpha} - 1}\, dt$$

puesto que, evidentemente, cuando x es interior a la estrella A de f_0, para valores suficientemente pequeños de ε y de α, la integral

$$\int_0^1 f\left(\frac{x\,\Phi(t; \varepsilon, \alpha)}{1+2\alpha}\right) \frac{\dfrac{\Phi'(t; \varepsilon, \alpha)}{1+2\alpha}}{\dfrac{\Phi(t\,; \varepsilon, \alpha)}{1+2\alpha} - 1}\, dt$$

se anula, ya que la curva descrita por

$$\frac{x\,\Phi(t\,; \varepsilon, \alpha)}{1+2\alpha},$$

cuando t describe el segmento real (0,1), es interior a la estrella A de f_0 y además no rodea el punto x.

Aplicando, pues, a F_1 el procedimiento de sumación Ψ y poniendo en lugar de las $a_n^{(1)}$ sus expresiones en función de x, ε, α, $b_0, \ldots,$ y b_{n-1}, obtendremos la igualdad

$$f_A(x) = \lim_{\varepsilon=0} \lim_{\alpha=0} \lim_{p=q} \ldots \lim_{n=\infty} \beta^{(1)}_{p,\ldots,n}(x\,;\ \varepsilon,\ \alpha,\ b_0, \ldots, b_{n-1})$$

válida en el interior de la estrella A de f_0.

Hasta aquí ninguna ventaja compensa la introducción de F_1 (evidentemente más complicada que la función F), pero si aplicamos la fórmula anterior a los puntos interiores a los segmentos rectilíneos l que cumplen las condiciones a, b y c, aparecerán claramente ciertas ventajas.

Sea x un punto interior al segmento l, si ε y α además de satisfacer a las desigualdades (5) satisfacen asimismo a la

$$(7) \qquad |x| \frac{1-\alpha}{1+2\alpha} > r_2,$$

en virtud de las condiciones I, II, III, IV y V_2, resulta que las curvas descritas por

$$(8) \qquad \frac{x\,\Phi\,(t\,;\,\varepsilon,\,\alpha)}{1+2\alpha}$$

y por

$$(9) \qquad x\,\Phi\,(t\,;\,\varepsilon,\,\alpha)$$

son interiores al dominio

$$(10) \qquad c_0 + s\,(\eta_0) - l_1$$

y, además, que el punto $z = 1$ es interior a la estrella A de F_1. Por otra parte, la condición V_2 enseña que las curvas descritas por (8) y (9) rodean el mismo número de veces cualquier punto del segmento l_1, y como sea que estos puntos son los únicos que pueden ser singulares para f_A en el dominio obtenido añadiendo los puntos frontera al (10) y teniendo en cuenta que la curva (8) no rodea el punto x, resulta que, para los valores de ε y de α que verifican las (5) y la (7), tendremos, según la fórmula de CAUCHY,

$$f_A\,(x) = F_1\,(1\,;\,x,\,\varepsilon,\,\alpha,\,f)$$

En consecuencia, para todo punto x interior a los segmentos l que cumplen las condiciones a, b y c del n.° 5, tendremos:

$$f_A\,(x) = \lim_{\varepsilon=0}\,\lim_{\alpha=0}\,\lim_{p=q}\,\ldots\,\lim_{n=\infty}\,\beta^{(1)}_{p,\ldots,n}\,(x\,;\,\varepsilon,\,\alpha,\,b_0,\,\ldots,\,b_{n-1})$$

Hemos obtenido, pues, a partir de un algoritmo de sumación válido en el interior de la estrella A, otro algoritmo de sumación válido incluso en algunos segmentos de la frontera de esa misma estrella.

7. Antes de dar por terminada esta sección daremos otro ejemplo de condición V algo más restrictiva que la V_2 y que nos permitirá ex-

tender aún más el dominio de validez de los algoritmos de sumación β, y ello, sin necesidad de introducir la función F_1 en lugar de la F.

Supongamos que la familia de las Φ esté condicionada, además de por las cuatro condiciones del n.° 1, por la siguiente :

V_3) Cualquiera que sea el punto y interior al dominio $\Delta_1(\varepsilon, \alpha)$, la ecuación en t

$$\Phi(t; \varepsilon, \alpha) - y = 0$$

no posee ninguna raíz real t_2 que verifique $o \leqslant t_2 \leqslant 1$; donde el dominio $\Delta_1(\varepsilon, x)$ es el rectángulo formado por todos los puntos y que verifican

$$\alpha \leqslant R[y] \leqslant 1 - \alpha \qquad o \leqslant I[y] \leqslant \varepsilon$$

Esta condición impone que la curva descrita por

$$\Phi(t; \varepsilon, \alpha), \tag{11}$$

cuando t describe el segmento (0,1), va de los alrededores del punto cero a los alrededores del punto 1 siguiendo un camino forzosamente a la derecha del segmento real $(\alpha, 1 - \alpha)$ y que regresa hacia el punto cero por el mismo lado de este segmento. Esto demuestra que ningún punto real que verifique $\alpha \leqslant y \leqslant 1 - \alpha$ puede ser rodeado por la curva descrita por (11).

A causa de continuar cumpliéndose las condiciones I, II, III y IV, no hay necesidad de insistir para demostrar que la igualdad

$$f_A(x) = \lim_{\varepsilon = 0} \lim_{\alpha = 0} \lim_{p = q} \dots \lim_{n = \infty} \beta_{p, \dots, n}(x; \varepsilon, \alpha, b_0 \dots, b_{n-1})$$

sigue siendo válida cuando x es interior a la estrella A de f_0.

Sea ahora l un segmento rectilíneo perteneciente a la frontera de la estrella A de f_0 y que verifica las tres condiciones siguientes :

a_1) Todos los puntos interiores a l tienen el mismo argumento θ_1.

b_1) Representando por r_1 el máximo de los módulos de los puntos de l, existe un número positivo η_0, tal que todos los puntos que verifican las desigualdades

$$|x| \leqslant r_1 \qquad \theta_1 > \arg x > \theta_1 - \eta_0 \tag{12}$$

son interiores a la estrella A de f_0.

c_1) Desde el dominio (12) f_A puede ser prolongada analíticamente a través de l, pero sin que la rama que se obtiene al otro lado de l tenga que ser igual f_A en los puntos interiores a la estrella A, si al otro lado de l existen tales puntos.

El valor de $f(x)$ en un punto x interior a l obtenido prolongando f_0 por un camino interior al dominio (12) lo representaremos por $f_d(x)$, pues, en este caso, hay necesidad de distinguir entre el valor obtenido llegando a l por caminos a la derecha de dicho segmento, del valor obtenido por caminos a la izquierda que puede ser diferente del primero e incluso dejar de existir.

Representemos, como anteriormente, por r_2 el mínimo del módulo de los puntos interiores a l y por r_o el radio del círculo de convergencia c_o *de* f_o, si definimos el dominio $s_1(\eta)$ por la propiedad que todo punto del mismo verifica

$$|x| \leqslant r_1, \qquad \theta_1 > \arg x > \theta_1 - \eta$$

y el $s_2(\eta)$ por

$$r_2 \leqslant |x| \leqslant r_1, \qquad \theta_1 \leqslant \arg x < \theta_1 + \eta,$$

evidentemente, por un segmento l determinado que cumpla las condiciones a_1, b_1 y c_1 del presente n.°, existirá un $\eta_1 > 0$ tal, que la función f_o podrá prolongarse analíticamente en la totalidad del dominio:

$$c_o + s_1(\eta_1) + s_2(\eta_1) \tag{13}$$

En consecuencia, las propiedades I, II, III, IV y V_3, permiten demostrar que, cuando x es interior a l y ε y α verifican

$$|x|\,\varepsilon < r_o \operatorname{sen} \eta_1, \quad |x|\sqrt{\varepsilon^2+\alpha^2} < r_o, \quad |x|^2(2\alpha+\alpha^2+\varepsilon^2) < r_1^2 - |x|^2, \quad |x|(1-\alpha) > r_2,$$

la curva descrita por

$$x\,\Phi(t\,;\,\varepsilon, \alpha)$$

es interior al dominio (13), el punto $z = 1$ es interior a la estrella A de F y, finalmente, puesto que el dominio (13) es simplemente conexo, se cumple

$$f_d(x) = F(1\,;\,x, \varepsilon, \alpha, f)$$

y, por tanto, para x interior a uno cualquiera de los segmentos l considerados en este número, tendremos :

$$f_d(x) = \lim_{\varepsilon=0}\lim_{\alpha=0}\lim_{p=q}\dots\lim_{n=\infty}\beta_{p,\dots,n}(x;\varepsilon,\alpha,b_o,\dots,b_{n-1}).$$

Si en la condición V_3 hubiésemos substituído el dominio $\Delta_1(\varepsilon,\alpha)$ por el que se deduce de éste mediante una simetría respecto al eje real, hubiésemos obtenido fórmulas que nos hubiesen dado los valores de f siguiendo caminos infinitamente próximos al rectilíneo, pero a la izquierda del mismo.

III

MODIFICACIONES QUE PUEDEN INTRODUCIRSE EN LA FAMILIA DE LAS Φ CUANDO LA TRANSFORMACIÓN SE APLICA A UN ALGORITMO Ψ CON PROPIEDADES DETERMINADAS

8. En esta sección nos proponemos estudiar las modificaciones que pueden introducirse en la definición de la familia de las Φ cuando los Ψ son métodos de sumación que, aplicados directamente a f_o darían los valores de $f_d(x)$, incluso cuando x es un punto interior a los segmentos, estudiados en el n.° anterior.

De momento, supondremos que el método Ψ solamente está condicionado por la condición anterior, y únicamente en el n.° 9 estudiaremos un caso particular.

Hasta cierto punto, en este caso basta considerar la familia de las Φ reducida a la sola función

$$\Phi(t;0,0) = \Phi_o(t),$$

si bien a causa de que esta función no ha sido definida en el n.° 1 (pues solamente definimos Φ para $\varepsilon > 0$ y $\alpha > 0$), debemos imponer ciertas condiciones a la Φ_o para completar su definición y darle ciertas propiedades que la hagan apropiada a nuestro objeto. Supondremos, pues, que la función $\Phi_o(t)$ cumple las condiciones siguientes :

I') La función $\Phi_o(t)$, cuando t es real y $o \leqslant t \leqslant 1$, es holomorfa.

II') En los mismos puntos t que en la condición I', Φ_o es real y verifica

$$0 \leqslant \Phi_o(t) \leqslant 1$$

III') $\Phi_o(o) = \Phi_o(1) = 0$

IV') La ecuación

$$\Phi_o(t) - 1 = 0$$

posee en el segmento (0,1) una sola raíz t_1 la cual es doble.

Construyamos la función

$$F_o(z\,;\,x,\,f) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^z f(x\,\Phi_o(t))\,\frac{\Phi_o'(t)}{\Phi_o(t)-1}\,d\,t,$$

igual que en la sección I, se demuestra que la función F_o es holomorfa en cierto círculo $|z| < R'_1$, donde R'_1 solamente depende de x, de r_o y de la función Φ_o.

Si x es interior a la estrella A de f_o, la curva descrita por

$$x\,\Phi_o(t) \tag{14}$$

cuando t va del punto cero al punto 1 siguiendo un camino T situado en el semiplano inferior e infinitamente próximo al segmento rectilíneo (0,1), será interior a la estrella A de f_o y, además, rodeará una sola vez el punto x.

Puesto que el camino descrito por (14) es interior a la estrella A de f_o y T no pasa por el valor t_1, la función

$$f(x\,\Phi_o(t))\,\frac{\Phi'_o(t)}{\Phi_o(t)-1}$$

es holomorfa en todos los puntos de T. En consecuencia, la función $F_0(z\,;\,x,\,f)$ puede ser prolongada analíticamente mientras z siga el camino T. De esto se deduce que el punto $z = 1$, o es interior a la estrella A de F_o, o cuanto menos es interior a un segmento rectilíneo que pertenece a la frontera de esta última estrella y que tiene respecto a la función F_o las propiedades a_1, b_1 y c_1 del n.° 7. Por tanto, aplicando a F_o un procedimiento de sumación Ψ que represente los valores de la función incluso en estos segmentos, podremos escribir

$$F_{od}(1\,;\,x,f) = \lim_{p=q} \ldots \lim_{n=\infty} \Psi_{p,\ldots,n}(1\,;\,a_o^{(0)},\ldots,a_n^{(0)})$$

donde las $a_n^{(0)}$ representan de modo semejante a las a_n las expresiones

$$a_n^{(0)} = a_n^{(0)}(x,f) = \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n F_o(z\,;\,x,f)}{\partial z^n}\right]_{z=0} = \sum_{k=0}^{n-1} h_{n,k}^{(0)}\, b_k\, x^k \qquad (a_o^{(0)}=0)$$

donde las $h_{n,k}^{(0)}$ son constantes que solamente dependen de Φ_o (hubiésemos podido escribir $h_{n,k}(0,0)$ en lugar de $h_{n,k}^{(0)}$ para guardar más unidad con la notación $h_{n,k}(\varepsilon,\alpha)$).

El hecho de que la curva descrita por (14), cuando t describe T, rodee una sola vez el punto x nos autoriza, aplicando la fórmula de Cauchy, a escribir

$$f_A(x) = F_{od}(1\,;\,x,f)$$

y de esto resulta, substituyendo en Ψ las $a_n^{(0)}$ por sus valores en función de x y de las b_n,

$$f_A(x) = \lim_{p=q} \ldots \lim_{n=\infty} \beta_{p,\ldots,n}^{(0)}(x\,;\,b_o,\ldots,b_{n-1})$$

fórmula válida en todo punto interior a la A de f_o y la cual consta del mismo número de pasos al límite que el algoritmo Ψ del cual hemos partido.

La no introducción de nuevos pasos al límite es debido a que podemos considerar, en cierto modo, que los pasos respecto a ε y a α están incluídos ya en el método Ψ.

9. H. von Koch (1) ha obtenido unos algoritmos de sumación que para ser aplicables a $F_o(z\,;\,x,f)$ en los puntos interiores a los segmentos l de la frontera de la A de F_o que tienen las propiedades a_1, b_1 y c_1 es necesario que la F_o, cualquiera que sea $\mu > o$, verifique

$$\log|F_o(z\,;\,x,f)| < e^{\frac{\mu}{\theta_1-\theta}} \qquad (z = r\,e^{i\theta})$$

(1) Koch (H. v.): «Sur le prolongement d'une série de Taylor» y «Contributions a la theorie du prolongement d'une fonction analytique» (Ark. fór Mat. Astro. Och Fys. B. 12 n.º 11 y 23, 1917).

para

$$0 < \theta_1 - \theta < \theta(\mu) \qquad\qquad r \leqslant r_1$$

donde θ_1 es el argumento y r_1 el máximo del módulo de los puntos interiores al segmento l en cuestión.

Resulta fácil convencerse que, cuando x es interior a la estrella A de f_o, tomando como segmento l un segmento que comprenda al punto $z = 1$ en su interior, la F_o cumplirá en las proximidades de este segmento la condición de KOCH. En efecto, en el segmento rectilíneo definido por $0 \leqslant z \leqslant 1$ la función F_o tiene como solo punto singular posible el punto $z = t_1$ y a la derecha del mismo segmento la mencionada función verificará, para $|z| \leqslant 1$ y $\arg z = -\eta$.

$$|F_o(z;\, x,\, f)| = \Theta\left(\log \frac{1}{\operatorname{sen} \eta}\right)$$

lo cual es suficiente para que los procedimientos de sumación de KOCH sean aplicables. Esto demuestra que, para que la transformación que estudiamos en esta sección sea también aplicable no es necesario que el algoritmo Ψ sea válido en todos los l con las solas condiciones a_1, b_1 y c_1, sino que puede asimismo ser aplicable a métodos que además de estas condiciones impongan otras a los l para ser válidos en ellos.

10. Vamos ahora a obtener la expresión de las $a_n^{(0)}$, o lo que es lo mismo, la expresión que toman las $h_{n,k}^{(0)}$ cuando $\Phi_o(t) = 4\,t\,(1 - t)$.

En primer lugar las identidades

$$f(4\,x\,t\,(1-t)) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\, 4^k\, x^k\, t^k\, (1-t)^k = \sum_{k=0}^{\infty} l_k\, t^k$$

nos demuestran

$$l_m = \sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} (-1)^j\, c_{m-j}^{(j)}\, 4^{m-j}\, b_{m-j}\, x^{m-j}$$

donde $\left[\dfrac{m}{2}\right]$ representa el mayor entero igual o inferior a $\dfrac{m}{2}$ y los $c_{m-j}^{(j)}$ son los coeficientes binómicos.

Si definimos los l'_s por la identidad

$$4\,\frac{f(4\,x\,t\,(1-t))}{2\,t-1} = -\sum_{s=0}^{\infty} l'_s\, t^s$$

tendremos

$$l'_s = \sum_{m=0}^{s} 4\, l_m\, 2^{s-m} = \sum_{m=0}^{s} 4.\, 2^{s-m} \sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} (-1)^j\, c_{m-j}^{(j)}\, 4^{m-}\;\; b_{m-j}\, x^{m-j}$$

o sea :

$$l'_s = 4 \sum_{k=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} 2^s\, b_k\, x^k + 4 \sum_{k=\left[\frac{s}{2}\right]+1}^{s} 2^{s+k}\, b_k\, x^k \sum_{m=0}^{s-k} (-1)^m \left(\frac{1}{2}\right)^m c_k^{(m)},$$

y puesto que

$$a_n^{(0)}\,(x, f) = -\frac{l'_{n-1}}{2\,\pi\, i\, n},$$

resulta, finalmente, para los $h_{n,k}^{(0)}$ correspondientes a la función $4\,t\,(1-t)$

$$h_{n,k}^{(0)} = i\,\frac{2^n}{\pi\, n}, \qquad \text{si} \qquad k \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right]$$

$$h_{n,k}^{(0)} = i\,\frac{2^{n+k}}{\pi\, n} \sum_{m=0}^{n-1-k} (-1)^m\, c_k^{(m)} \left(\frac{1}{2}\right)^m, \qquad \text{si} \qquad \left[\frac{n-1}{2}\right] < k \leqslant n-1$$

evidentemente, la segunda igualdad vale incluso para los valores de k que intervienen en la primera, puesto que para $o \leqslant k \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right]$ se cumple, dadas las propiedades de los coeficientes binómicos,

$$\sum_{m=0}^{n-1-k} (-1)^m\, c_k^{(m)} \left(\frac{1}{2}\right)^m = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

La teoría general desarrollada en esta sección nos permite afirmar, en particular, que la transformación estudiada en este número puede aplicarse a cualquier algoritmo de sumación Ψ que sea válido, incluso en los l que verifican a_1, b_1 y c_1.

11. Devolvamos de nuevo a la Φ_o toda su generalidad condicionada, pero por las cuatro condiciones del n.° 8 y por la siguiente :

V') t_1 es el único valor real tal que $o \leqslant t_1 \leqslant 1$ y que

$$\Phi'_o(t_1) = 0$$

Además, supongamos dada una función $\Phi_2(\varepsilon)$ que tiene las propiedades I', II', III' y V' y que en lugar de la IV' tiene la propiedad siguiente :

IV'$_1$) La ecuación

$$\Phi_2(t) - 1 = 0$$

posee en el segmento real (0,1) una sola raiz t_1 la cual es cuádruple.

Sea :

$$F_2(z; x, f) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^z \left[f(x\Phi_2(t)) \frac{\Phi'_2(t)}{\Phi_2(t) - 1} - f(x\Phi_o(t)) \frac{\Phi'_o(t)}{\Phi_o(t) - 1} \right] d\,t,$$

igual que anteriormente, es fácil ver que en un entorno del origen tendremos :

$$F_2(z; x, f) = \sum_0^\infty a_n^{(2)} z^n,$$

donde :

$$a_n^{(2)} = a_n^{(2)}(x, f) = \sum_{k=0}^{n-1} h_{n,k}^{(2)} b_k x^k \qquad (a_o^{(2)} = 0)$$

y que la F_2 es prolongable analíticamente a lo largo del camino T.

Por otra parte, cuando t describe T, la curva descrita por $\Phi_2(t)$ rodea dos veces el punto 1 en sentido positivo, y, en consecuencia, cuando x es interior a la estrella A de f_o, tendremos, según la fórmula de Cauchy,

$$F_{2d}(1; x, f) = 2 f_A(x) - f_A(x) = f_A(x)$$

Como sea que, además, cuando T tiende a convertirse en el segmento rectilíneo, las curvas descritas por $\Phi_2(t)$ y por $\Phi_o(t)$ rodean una sola vez cualquier punto real y tal que $o < y < 1$, resulta que, si x es un punto interior a un segmento l de la frontera de A que cumpla las condiciones a, b y c del n.° 5, de nuevo tendremos :

$$F_{2d}(1; x, f) = f_A(x)$$

Ahora bien, aplicando a F_2 un algoritmo de sumación Ψ que tenga las propiedades supuestas en el n.° 8, o sea, que sea válido en los segmentos de la frontera de A que verifican las propiedades a_1, b_1 y c_1 del n.° 7, resultará

$$F_{2d}(1\,;\,x,\,f) = \lim_{p=q} \ldots \lim_{n=\infty} \Psi_{p,\ldots,n}(1\,;\,a_o^{(2)},\ldots,a_n^{(2)})$$

y substituyendo las $a_n^{(2)}$ por sus expresiones en función de x y de las b_k, podremos escribir

$$f_A(x) = \lim_{p=q} \ldots \lim_{n=\infty} \beta^{(2)}_{p,\ldots,n}(x\,;\,b_o,\ldots,b_{n-1})$$

algoritmo de sumación válido incluso en los segmentos l de la frontera de la A de f_o que tienen las propiedades a, b y c del n.° 5.

IV

COMPORTAMIENTO EN LOS PUNTOS SINGULARES

12. Situémonos de nuevo en el punto de vista más general de la sección I, es decir, consideremos la familia de las $\Phi(t\,;\,\varepsilon,\alpha)$ solamente condicionada por las I, II, III y IV del n.° 1.

En el n.° 5, sección II, hemos visto que la aplicación a un algoritmo cualquiera de una transformación particular de la clase de las que estudiamos puede dar lugar a algoritmos de sumación los cuales en los polos de f pueden tomar valores finitos, según hemos visto para la función

$$\frac{1}{1-x}$$

Las propiedades de la curva descrita por

$$\Phi(t\,;\,\varepsilon,\alpha),$$

sin necesidad de introducir ningún paso al límite, además de los referentes a ε y a α, y sin imponer nuevas condiciones a la familia de las Φ, nos permiten obtener, variando ligeramente la transformación que estudiamos, procedimientos de sumación válidos incluso para los segmentos l que verifican las condiciones a_1, b_1 y c_1 y que cuando x es un polo de f toman el valor ∞.

En efecto, sea η una función de ε que verifica

$$(15) \qquad \eta > 0 \qquad \lim_{\varepsilon = 0} \eta = 0 \qquad \lim_{\varepsilon = 0} \frac{\eta}{\varepsilon} = \infty .$$

Ahora, si en lugar de aplicar el procedimiento de sumación Ψ a la función

$$F(z\,;\, x,\, \varepsilon,\, \alpha,\, f)$$

lo aplicamos a

$$F(z\,;\, x\, e^{-i\eta},\, \varepsilon,\, \alpha,\, f)$$

obtendremos, para $z = 1$,

$$F(1\,;\, x\, e^{-i\eta}, \varepsilon, \alpha, f) = \lim_{p = q} \ldots \lim_{n = \infty} \Psi_{p, \ldots n}(1\,;\, a'_o, \ldots, a'_n)$$

donde :

$$a'_n = a_n(x\, e^{-i\eta}, \varepsilon, \alpha, f)\,;$$

si x es interior a la estrella A de f_o, para ε y α suficientemente pequeñas, tendremos

$$f_A(x\, e^{-i\eta}) = F(1\,;\, x\, e^{-i\eta}, \varepsilon, \alpha, f),$$

y, por lo tanto, debido a la continuidad de f_A en el interior de la estrella A, y mediante los mismos razonamientos que en la sección I, resultará

$$f_A(x) = \lim_{\varepsilon = 0} \lim_{\alpha = 0} \lim_{p = q} \ldots \lim_{n = \infty} \beta'_{p, \ldots, n}(x;\, \varepsilon,\, \alpha,\, b_o,\, \ldots,\, b_{n-1}),$$

donde :

$$\beta'_{p, \ldots, n}(x, \varepsilon, \alpha, b_o, \ldots, b_{n-1}) = \beta_{p, \ldots, n}(x\, e^{-i\eta}\,;\, \varepsilon, \alpha, b_o, \ldots, b_{n-1})$$

Sea l un segmento rectilíneo que cumpla las condiciones a_1 y b_1 y que en lugar de suponer que cumple la c_1, suponemos que cumple tan solo la

c_2) Si x es un punto interior a l existe siempre el límite de $f_A(x\, e^{-i\eta})$ cuando η tiende a O, pudiendo este límite, que representaremos por $f_A(x)$, ser finito o infinito.

Evidentemente, si c_1 se cumple también se cumplirá c_2, pero no inversamente.

Con estas condiciones, si x es un punto interior a l, para ε y α suficientemente pequeñas y cuando t describe el segmento (0,1), el punto

$$x\, e^{-i\eta}\, \Phi(t\,;\, \varepsilon, \alpha)$$

describirá una curva que, teniendo en cuenta las (15), se demuestra que es interior al dominio definido por

$$|x| < r_1, \qquad \theta_1 > \arg x > \theta_1 - \eta_o,$$

y, por consiguiente:

$$f_d\,(x\,e^{-i\eta}) = F\,(1\,;\,x\,e^{-i\eta}, \varepsilon, \alpha, f) = \lim_{p=q} \ldots \lim_{n=\infty} \beta'_{p,\ldots,n}\,(x\,;\,\varepsilon, \alpha, b_o, \ldots, b_{n-1})$$

la condición c_2 nos permite escribir finalmente

$$f_d\,(x) = \lim_{\varepsilon=0}\, \lim_{\alpha=0}\, \lim_{p=q} \ldots \lim_{n=\infty} \beta'_{p,\ldots,n}\,(x\,;\,\varepsilon, \alpha, b_0, \ldots, b_{n-1})$$

de lo cual resulta que si x es un polo para f_d el método de sumación β' toma el valor infinito en este punto.

V

ALGORITMOS DE SUMACIÓN DE SERIES DE DIRICHLET

13. Es sumamente conocido el hecho de que el estudio de la serie de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-\lambda_n s}, \tag{16}$$

donde

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots \qquad \lim \lambda_n = \infty,$$

en el plano complejo es igual al estudio de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\, z^{\lambda_n} \tag{17}$$

en la superficie de RIEMANN de log z, puesto que la última serie es la transformada de la primera mediante la substitución de s por $-\log z$.

Por la substitución anterior los semiplanos de convergencia, convergencia absoluta, holomorfía, etc., se transforman en dominios de la superficie de RIEMANN definidos mediante desigualdades de la forma

$$|z| < c$$

donde c es una constante.

Si la serie (16) tiene un semiplano de convergencia se podrá definir su estrella horizontal principal de holomorfía como formada por todos los puntos que pueden alcanzarse prolongando analíticamente la función representada por dicha serie a lo largo de segmentos rectilíneos horizontales. Esta estrella se transforma en la estrella principal de la (17) poniendo

$$s = -\log z\,;$$

a cual podremos definir como el conjunto de puntos que pueden alcanzarse mediante prolongación analítica, a lo largo de segmentos rectilíneos de argumento constante, de la función representada por la serie (17) en su dominio de convergencia.

Según lo anterior, todo algoritmo de sumación que represente los valores de la función representada por la serie (17) en su estrella principal de holomorfía, nos dará un algoritmo de sumación que dará los valores de la función representada por la serie (16) en su estrella horizontal principal de holomorfía y viceversa. En lo sucesivo razonaremos sobre series de la forma (17), si bien nada nos impediría razonar directamente sobre las de la forma (16), salvo que las fórmulas resultarían algo más complicadas y la analogía con lo expuesto en las secciones anteriores menos evidente.

14. Supongamos dada, lo mismo que en la sección I, una familia de funciones Φ tal, que a todo par de números $\varepsilon > 0$ y $\alpha > 0$ corresponde una función $\Phi(t\,; \varepsilon, \alpha)$ de la familia que verifica las condiciones siguientes :

I″) En todo punto real t tal que $o < t \leqslant 1$ la función Φ es holomorfa, y en un entorno del punto $t = 0$ puede representarse por una serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, t^{v_n}$$

que posee un dominio de convergencia absoluta, y donde las v_n representan números reales positivos que verifican

$$v_1 < v_2 < \dots < v_n < \dots \qquad \lim_{n=\infty} v_n = \infty$$

II″) Los valores que toma Φ, cuando t es real y $o \leqslant t \leqslant 1$, son interiores al dominio $\Delta\,(\varepsilon, \alpha)$, y la ecuación

$$\Phi\,(t\,;\,\varepsilon, \alpha) - 1 = 0$$

no posee ninguna raíz real t_1 tal que $o \leqslant t_1 \leqslant 1$.

III″) $\Phi\,(o\,;\,\varepsilon, \alpha) = \Phi\,(1\,;\,\varepsilon, \alpha) = 0$, de donde $v_1 > 0$.

IV″) El argumento de $\Phi\,(t\,;\,\varepsilon, \alpha) - 1$ crece 2π, cuando t describe el segmento (0,1), o sea, la curva descrita por Φ rodea una sola vez el punto 1 en sentido positivo. (1).

Es obvio que el dominio $\Delta\,(\varepsilon, \alpha)$ que interviene en la condición II″ es el mismo que hemos definido en el n.° 1.

15. Sea

$$f_o\,(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, x^{\lambda_n}$$

una serie que posee un dominio de convergencia absoluta (2), donde las λ_n además de las condiciones del n.° 13 cumplen la $\lambda_1 \geqslant 0$.

Construyamos ahora la función

$$F\,(z\,;\,x, \varepsilon, \alpha, f) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^z f\,(x\,\Phi\,(t\,;\,\varepsilon, \alpha))\,\frac{\Phi'(t\,;\,\varepsilon, \alpha)}{\Phi\,(t\,;\,\varepsilon, \alpha) - 1}\,d\,t$$

Las condiciones I″ y III″ del n.° anterior, juntamente con el hecho de que f_o posee un dominio de convergencia absoluta, nos permite afirmar que la función

$$f\,(x\,\Phi\,(t\,;\,\varepsilon, \alpha))$$

(1) Evidentemente, las condiciones II″, III″ y IV″ son iguales respectivamente a las II, III y IV del número 1.

(2) La existencia de un dominio de convergencia absoluta no es totalmente necesaria para la validez de los resultados que siguen, pudiéndose emplear una condición algo menos restrictiva, si bien las demostraciones resultarían menos simples.

es representable, para valores de t cuyo módulo sea suficientemente pequeño, por una serie

$$(18) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} l_n\, t^{v'_n}$$

que posee un dominio de convergencia absoluta, y donde la sucesión de las v'_n se obtiene ordenando según sus valores las expresiones

$$\lambda_m v_1 + (v_{k_1} - v_1) + \ldots + (v_{k_j} - v_1) \qquad \begin{pmatrix} m = 1, 2, 3, \ldots \\ j = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

donde k_1, $k_2 \ldots$ y k_j son enteros positivos cualesquiera superiores a 1 y que pueden ser todos, algunos o ninguno iguales entre sí.

Asimismo para $|t|$ suficientemente pequeño, la función

$$\frac{\Phi'(t\,;\varepsilon,\alpha)}{\Phi(t\,;\varepsilon,\alpha) - 1}$$

podrá ser representada por una serie

$$(19) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} l'_n\, t^{v''_n}$$

la cual poseerá un dominio de convergencia absoluta, y donde la sucesión de las v''_n se obtiene ordenando según sus valores las expresiones

$$v_m - 1 + v_{k_1} + v_{k_2} + \ldots + v_{k_j} \qquad \begin{pmatrix} m = 1, 2, 3, \ldots \\ j = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

donde k_1, k_2, $k_3 \ldots k_j$ son enteros positivos cualesquiera que pueden ser todos, algunos o ninguno iguales entre sí. De $v_1 > 0$ se deduce $v''_1 > -1$.

Según un teorema sumamente conocido de la teoría de las series, podemos afirmar que, en el dominio formado por los puntos comunes a los dominios de convergencia absoluta de (18) y de (19), podremos representar

$$f(x\Phi(t\,;\varepsilon,\alpha))\frac{\Phi'(t\,;\varepsilon,\alpha)}{\Phi(t\,;\varepsilon,\alpha) - 1}$$

por una serie absolutamente convergente

$$(20) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} l''_n\, t^{\lambda'_n},$$

donde la sucesión de las λ'_n se obtiene ordenando las expresiones

$$v'_k + v''_m,$$

donde k y m son dos enteros positivos cualesquiera.

Recordando que la serie (20), según un teorema de las teorías de las series de DIRICHLET, posee un dominio de convergencia uniforme, puesto que posee un dominio en el que es convergente, podremos integrarla término a término, y, por lo tanto, si R es suficientemente pequeña, para $|z| \leqslant R$

$$F(z; x, \varepsilon, \alpha, f) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\lambda''_n} \qquad (\lambda''_n = \lambda'_n + 1)$$

la serie del segundo miembro siendo absolutamente convergente, y

$$a_n = a_n(x, \varepsilon, \alpha, f) = \sum_{\lambda_h v_1 + v_1 \leq \lambda''_n} h_{n,k}(\varepsilon, \alpha)\, b_k\, x^{\lambda_k}$$

Además, mediante razonamientos del todo semejantes a los de la sección I, se deduce que, para ε y α suficientemente pequeñas y cuando x es interior a la estrella principal de f_0, el punto $z = 1$ es interior a la estrella principal de F. Por otra parte, la fórmula de CAUCHY permite deducir, teniendo en cuenta las propiedades III'' y IV'', que cuando x es interior a la estrella principal de f_0 y ε y α suficientemente pequeñas, tendremos

$$f_A(x) = F(1; x, \varepsilon, \alpha, f)$$

o sea, que siempre que x sea interior a la estrella principal de f_0 podremos escribir

$$f_A(x) = \lim_{\varepsilon = 0} \lim_{\alpha = 0} F(1; x, \varepsilon, \alpha, f)$$

16. Sea Ψ un algoritmo de sumación de series de la forma (17), o sea, un procedimiento de sumación deducido por la transformación

$$s = -\log z$$

de un algoritmo de sumación de series de DIRICHLET. Supondremos, además, que el algoritmo Ψ es válido en el interior de la estrella principal de holomorfía. En consecuencia, cuando x es interior a la estrella principal de f_o y para ε y x suficientemente pequeñas, tendremos :

$$F(1\,;x,\varepsilon,\alpha,f) = \lim_{p=q} \ldots \lim_{n=\infty} \Psi_{p,\ldots,n}(1\,;a_1,\ldots,a_n)$$

puesto que el punto $z = 1$ es interior a la estrella de F, según hemos visto en el número anterior.

Por tanto, substituyendo en Ψ las a_n por sus valores en función de las b_k y x, tendremos :

$$\Psi_{p,\ldots,n}(1\,;a_1,\ldots,a_n) = \beta_{p,\ldots,n}(x\,;\varepsilon,\alpha,b_1,\ldots,b_k)$$

donde k es el mayor entero que verifica

$$\lambda_k v_1 + v_1 \leqslant \lambda''_n$$

De todo esto y de la última fórmula del número anterior, resulta

$$f_A(x) = \lim_{\varepsilon=0}\lim_{\alpha=0}\lim_{p=g} \ldots \lim_{n=\infty} \beta_{p,\ldots,n}(x\,;\varepsilon,\alpha,b_1,\ldots,b_k)$$

Es decir, hemos obtenido un nuevo algoritmo de sumación para series de la forma (17), válido en su estrella principal de holomorfía, del cual, por la transformación $z = e^{-s}$ se deduce un algoritmo de sumación válido en el interior de la estrella horizontal principal y para las series de DIRICHLET.

La mayor parte de las modificaciones, de los comentarios y de los casos particulares estudiados en las secciones anteriores, tienen sus correspondientes para la transformación, estudiada en esta sección, de los algoritmos de sumación de las series de DIRICHLET.

17. Para el caso de los algoritmos de sumación de series de DIRICHLET resulta interesante el estudio de la transformación que se obtiene por los mismos procedimientos anteriores, modificando, pero, las condiciones que debe cumplir la familia de las Φ. Para enunciar las nuevas condiciones debemos definir primero el dominio $\Delta_2(\varepsilon,\alpha)$: este dominio será formado por la totalidad de los puntos que verifican

$$\alpha \leqslant \Re[z] \leqslant 1 + \alpha \qquad\qquad -\varepsilon < \Im[z] < \varepsilon$$

Con esta definición podemos dar para la familia de las Φ la siguiente definición:

A todo par de números $\varepsilon > 0$ y $\alpha > 0$ corresponde una función $\Phi(t; \varepsilon, \alpha)$ que cumple las siguientes condiciones:

I''') En todo punto real t, tal que $o \leqslant t \leqslant 1$, la función $\Phi(t; \varepsilon, \alpha)$ es holomorfa.

II''') Los valores de $\Phi(t; \varepsilon, \alpha)$, cuando t describe el segmento (0,1), son interiores a $\varDelta_2(\varepsilon, \alpha)$ y además la ecuación

$$\Phi(t; \varepsilon, \alpha) - 1 = 0$$

no tiene ninguna raíz real t_1, tal que $0 \leqslant t_1 \leqslant 1$.

III''') $\Phi(o; \varepsilon, \alpha) = \Phi(1; \varepsilon, \alpha) = \alpha$

IV''') El argumento de $\Phi(t; \varepsilon, \alpha) - 1$ aumenta de 2π cuando t describe el segmento (0,1), es decir, la curva descrita por Φ rodea una sola vez el punto 1 en sentido positivo. (1)

Sea

$$f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{\lambda_n}$$

una serie que para $|x| \leqslant R$ es convergente, pero para la que nada suponemos sobre si posee o no posee un dominio de convergencia absoluta. En un entorno de cualquier punto del dominio de convergencia, según un teorema conocido de la teoría de las series de Dirichlet, esta serie será uniformemente convergente; por otra parte, cualquiera que sea x para $\alpha > 0$ suficientemente pequeña, resultará evidentemente

$$|x\,\alpha| = |x\,\Phi(o; \varepsilon, \alpha)| < R$$

y, por tanto, según el conocido teorema de Weierstrass, la función,

$$f_o(x\,\Phi(t; \varepsilon, \alpha))$$

será representable en un entorno del origen por una serie de Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n\, t^n$$

(1) Las condiciones I''' y IV''' son iguales, respectivamente, a las I y IV del número 1.

y, en consecuencia, la función

$$F(z; x, \varepsilon, \alpha, f) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^z f(x\,\Phi(t; \varepsilon, \alpha))\frac{\Phi'(t; \varepsilon, \alpha)}{\Phi(t; \varepsilon, \alpha) - 1}\,dt.$$

será, asimismo, representable por una serie de TAYLOR

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

cuyo radio de convergencia no es nulo, y donde

$$a_n = a_n(x, \varepsilon, \alpha, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k}(\varepsilon, \alpha)\, b_k\, x^{\lambda_k} \qquad (a_o = 0)$$

Sea ahora Ψ un algoritmo de sumación de series de TAYLOR, generalmente las expresiones

$$\Psi_{p,\ldots,n}(z; a_o, \ldots, a_n)$$

son continuas respecto al conjunto de las a_n; supongamos, pues, que el método Ψ cumpla esta condición.

Los mismos razonamientos tantas veces repetidos nos darán:

$$f_A(x) = \lim_{\varepsilon=0}\lim_{\alpha=0} F(1; x, \varepsilon, \alpha, f) = \lim_{\varepsilon=0}\lim_{\alpha=0}\lim_{p=q}\ldots\lim_{n=\infty}\Psi_{p,\ldots,n}(1; a_0, \ldots, a_n)$$

representemos ahora por $a_{n,m}$ la expresión

$$\sum_{k=1}^{m} c_{n,k}(\varepsilon, \alpha)\, b_k\, x^{\lambda_k}$$

por la propiedad que suponemos satisface Ψ, tendremos:

$$\Psi_{p,\ldots,n}(1; a_0, \ldots, a_n) = \lim_{m=\infty}\Psi_{p,\ldots,n}(1; a_{o,m}, \ldots, a_{n,m})$$

y, finalmente, substituyendo las $a_{n,m}$ por sus expresiones en función de las b_k y de x, resultará

$$f_A(x) = \lim_{\varepsilon=0} \lim_{\alpha=0} \lim_{p=q} \ldots \lim_{n=\infty} \lim_{m=\infty} \beta_{p,\ldots,n,m}(x; \varepsilon, \alpha, b_1, \ldots, b_m)$$

es decir, a partir de un algoritmo de series de TAYLOR, hemos obtenido un algoritmo de sumación para series de la forma (17), o lo que es lo mismo, para series de DIRICHLET; si bien éstos tienen tres pasos al límite más que el de que hemos partido. Por otra parte, estos algoritmos no presuponen que la serie de DIRICHLET posea ningún dominio de convergencia absoluta, contrariamente a los obtenidos en el número anterior, en los cuales era necesaria esta condición o cuanto menos otra algo menos restrictiva.

VI

NOTAS FINALES

18. Es interesante señalar que la diferencia entre $f_A(x)$ y la expresión

$$\lim_{p=q} \ldots \lim_{n=\infty} \beta_{p,\ldots,n}(x; \varepsilon, \alpha, b_0, \ldots, b_{n-1})$$

no disminuye continuamente al tender ε y α a cero, sino que, a partir de unos valores de ε y de α, se anula, es decir, se cumple la igualdad

$$f_A(x) = \lim_{p=q} \ldots \lim_{n=\infty} \beta_{p,\ldots,n}(x; \varepsilon, \alpha, b_0, \ldots, b_{n-1})$$

y la disminución de ε y α influye tan sólo en el conjunto de valores x que cumplen esta igualdad, de modo que, al tender ε y α a cero, este conjunto termina por comprender en su interior cualquier dominio finito interior a la estrella A de f_0.

19. Si en lugar de suponer que los dominios $\Delta(\varepsilon, \alpha)$ y $\Delta_2(\varepsilon, \alpha)$, cuando ε y α tienden a cero, se convierten al límite en el segmento rectilíneo (0,1),

se supone que dichos dominios tienden a convertirse en una curva cualquiera que una el punto 0 con el punto 1, entonces los algoritmos de sumación deducidos aplicando la transformación estudiada en este trabajo a los algoritmos válidos en la estrella A, o estrella rectilínea, serán válidos en estrellas curvilíneas; como resulta sin más que recurrir de nuevo a la serie de deducciones tantas veces repetidas.

Barcelona, 10 de marzo de 1947