

CALCOLO DEL NUCLEO RISOLVENTE DELLE EQUAZIONI FUNZIONALI LINEARI, MEDIANTE UN NUMERO FINITO DI INTEGRAZIONI ⁽¹⁾

MEMORIA di MARIO CARAFA (a Roma)

I N D I C E

	<u>Pagine</u>
Premessa.....	2
Cap. I. <i>Il funzionale analitico lineare « prolungamento analitico ».</i> <i>Il prodotto funzionale generalizzato e le funzioni-stampo.</i>	
1. Il funzionale lineare « prolungamento analitico ».....	6
2. Prolungamento analitico in un caso particolare.....	10
3. Alcune corrispondenze biunivoche nel campo dei numeri interi.	10
4. Prodotto funzionale simmetrico e prodotto funzionale genera- lizzato. Le funzioni preparatrice e le funzioni stampo.....	13
5. Potenza n.esima funzionale generalizzata delle funzioni di una sola variabile.....	22
6. Potenza n.esima funzionale generalizzata delle funzioni di più variabili.....	26
Cap. II. <i>Calcolo della potenza n.esima di composizione simmetrica con l'impiego delle funzioni-stampo. Estensione dei risultati al cal- colo del nucleo risolvete di una estesa classe di equazioni fun- zionali lineari.</i>	
7. La potenza n.esima di composizione simmetrica quale partico- lare potenza n.esima funzionale generalizzata.....	30
8. Calcolo, mediante integrali definiti, del nucleo risolvete di una certa classe di equazioni funzionali lineari (nel campo ana- litico).....	35
a) Premesse.....	35
b) La preparatrice generale.....	39

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale di Alta Matematica in Roma.

	Pagine
c) La funzione-stampo generale di composizione simmetrica. Calcolo del nucleo risolvente	42
d) Calcolo del nucleo associato e della soluzione $\gamma(\kappa, \lambda)$ dell'equazione funzionale lineare.....	45
9. Calcolo, con integrali definiti, del nucleo risolvente di una più ampia classe di equazioni funzionali lineari	50
10. Espressione esplicita, mediante integrali definiti, degli operatori funzioni di un dato operatore analitico lineare	58

Sunto. — Si introduce un particolare funzionale analitico lineare che dà il *prolungamento analitico* di una funzione (analitica), mediante un calcolo di residuo ed una derivazione rispetto ad un parametro ausiliario. Si dà il concetto di *prodotto funzionale generalizzato* e quello di *funzione-stampo*. Si trovano speciali funzioni-stampo per mezzo delle quali e di un numero finito di integrazioni ed una derivazione si riesce a calcolare il *nucleo risolvente* di una estesa classe di equazioni funzionali lineari, tra le quali figurano le *equazioni integrali di seconda specie* di FREHDHOLM e di VOLTERRA. Si applicano poi i risultati al calcolo degli *operatori che sono funzioni di un dato operatore analitico lineare*.

Premessa. — Applicando la *Teoria* ⁽¹⁾ *dei funzionali analitici* del Prof. LUIGI FANTAPPÌ, in un lavoro ⁽²⁾ a questo precedente, ho dato l'espressione esplicita mediante integrali definiti della soluzione dell'e-

⁽¹⁾ In questa memoria saranno più volte citati i seguenti lavori del Prof. LUIGI FANTAPPÌ, le indicazioni dei quali verranno abbreviate con le lettere maiuscole qui preposte a ciascuna:

F. A. : *I funzionali analitici*. — « Memorie della Accademia Nazionale dei Lincei », s. 6.°, Vol. 3.°, Fasc. 11. 1930.

N. F. : *Nuovi fondamenti della teoria dei funzionali analitici*. — « Memorie della Accademia d'Italia. Vol. 12.°, n. 13. 1941, pp. 617-706.

C. S. : *La giustificazione del calcolo simbolico e le sue applicazioni all'integrazione delle equazioni a derivate parziali*. — « Memorie dell'Accademia d'Italia ». Vol. 1.°, n.° 2. 1930.

S. D. P. : *Integrazione con quadrature dei sistemi a derivati parziali lineari e a coefficienti costanti in due variabili, mediante il calcolo degli operatori lineari*. — « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ». T. 57, 1933, pp. 137-195.

I. S. D. : *Integrazione in termini finiti di ogni sistema od equazioni a derivate parziali lineari e a coefficienti costanti, d'ordine qualunque*. — « Memorie della Accademia d'Italia ». Vol. 3.°, n.° 13-1937, pp. 613-651.

E. F. L. : *Le equazioni funzionali lineari nel campo complesso*. — « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei ». Vol. 9.°, s. 6.°, Fasc. 8. 1929.

P. F. P. — *L'indicatrice proiettiva dei funzionali lineari e i prodotti funzionali proiettivi*. — « Annali di Matematica pura ed applicata ». Serie IV. Tomo XXII. 1943, pp. 181-289.

⁽²⁾ M. CARAFA : *Risoluzione dell'equazione differenziale generale lineare binomia, di ordine qualunque, mediante un numero finito di integrazioni*. — « Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL) ». Vol. XXVI, s. 3.°, 1947.

quazione differenziale ordinaria lineare binomia di ordine qualunque: $\frac{d^n y}{dx^n} - a(x)y = f(x)$. Con ciò resta dimostrato che, l'equazione differenziale binomia di ordine superiore al 1°, sebbene, come è noto, non sia risolvibile per quadrature (integrazioni con l'estremo superiore variabile), lo è invece mediante integrali definiti.

E'allora naturale domandarsi se il risultato ottenuto non possa estendersi anche ad equazioni più generali di quelle differenziali binomie. Come vedremo in questo lavoro, la risposta è affermativa. Per meglio chiarire su quale base possa poggiarsi detta domanda, ricordo brevemente che, nel sopraricordato studio sulle equazioni binomie, l'idea centrale si riassume nell'osservazione che la soluzione di una certa equazione « intermedia », a cui si riporta, mediante adatte trasformazioni, l'equazione di partenza, sommata ad una serie di opportuni termini, viene a presentarsi come una funzione q che si riesce a costruire effettivamente dagli elementi noti per mezzo di procedimenti già conosciuti (mediante integrazioni in numero finito).

Per calcolare quindi la soluzione dell'equazione « intermedia » non resta che eliminare i termini inutili che figurano nella espressione della q .

Detta eliminazione si ottiene moltiplicando la funzione q per una funzione « invariabile »⁽¹⁾ e integrando poi rispetto ad un certo numero finito di variabili ausiliarie e derivando infine rispetto ad un'ultima variabile ausiliaria.

Ecco quindi come l'idea a cui abbiamo accennato, cioè di una possibile generalizzazione dei risultati ottenuti, si concretizza ora nella ricerca di un metodo di risoluzione delle equazioni funzionali lineari (nel campo analitico) basato sull'impiego di integrali definiti (in numero finito) e di alcune funzioni « invariabili » e quindi *calcolabili una volta per sempre*. Infatti, come mostreremo, il metodo in questione si può applicare a tutta un'estesa classe di equazioni funzionali lineari (tra le quali figurano anche le equazioni integrali di 2.^a specie di FREHDHOLM e di VOLTERRA), per le quali si ottiene così l'espressione esplicita del *nucleo risolvente*; nel caso di equazioni con funzione incognita di una sola variabile detto *nucleo risolvente* si ottiene precisamente *mediante 6 integrazioni definite ed una derivazione, a partire dal nucleo dell'equazione, e da 2 particolari funzioni « invariabili »* (indipendenti cioè dal nucleo stesso).

⁽¹⁾ Anche nel seguito diremo che una funzione o un funzionale è « invariabile » (o *fisso*) relativamente ad una data equazione, non perché sia costante, ma soltanto perché è indipendente da tutti gli elementi noti dell'equazione considerata.

I primi passi sono guidati dall'osservazione fondamentale che la *potenza n-esima di composizione simmetrica* del *nucleo* di un'equazione funzionale lineare (nel campo complesso) di *forma canonica* ⁽¹⁾, può ricavarsi dalla potenza ordinaria di pari grado dello stesso *nucleo*, *sopprimendo nel suo sviluppo in serie di Taylor un insieme infinito di termini (serie parziale)*. Si è allora cercato di individuare un procedimento che permetta di ottenere detta *eliminazione* con un numero di operazioni *finito ed indipendente da n*. Le ricerche si basano sull'altra osservazione che in una funzione

$$(1) \quad w(x, \alpha) = \sum_{0, k, h}^{\infty} a_{k, h} x^k \alpha^h$$

si può *contrassegnare* il termine generico $a_{k, h}$ in modo da poterlo individuare e moltiplicare per un qualunque prefissato coefficiente, anche se detto $a_{k, h}$ è confuso con altri termini $a_{s, r}$, come accade p. es. nella potenza ordinaria *s-esima* della w :

$$(2) \quad w^s(x, \alpha) = \sum_{0, k_s, h_s; k_{s-1}, h_{s-1}; \dots; k_1, h_1}^{\infty} a_{k_s, h_s} a_{k_{s-1}, h_{s-1}} \dots a_{k_1, h_1} x^{k_s + k_{s-1} + \dots + k_1} \alpha^{h_s + h_{s-1} + \dots + h_1}$$

Infatti ciò è possibile dato che tra le *coppie ordinate* (k, h) ed i corrispondenti numeri interi $(2k + 1) 2^h$, la corrispondenza è biunivoca e dato che il generico numero intero :

$$(3) \quad (n + 1)^{(2k_1 + 1) 2^{h_1}} + (n + 1)^{(2k_2 + 1) 2^{h_2}} + \dots + (n + 1)^{(2k_p + 1) 2^{h_p}}$$

(se è $p \leq n$) per una data scelta delle *coppie ordinate* $(k_1, h_1); (k_2, h_2); \dots; (k_p, h_p)$ assume un valore che non riprende più per nessun'altra scelta di dette coppie. Costruita allora (nel modo che vedremo) la funzione che si dice *preparata* della $w(x, \alpha)$:

$$(4) \quad \bar{w} = \sum_{0, k, h}^{\infty} a_{k, h} \xi^{(n+1)(2k+1)2^h} \Gamma^{k+h}$$

dove ξ ed r sono parametri ausiliari, si vede che eseguendo una qualunque potenza ordinaria della \bar{w} di grado $s \leq n$, è sempre possibile assegnare al generico termine dello sviluppo della \bar{w}^s un coefficiente tale che detta

⁽¹⁾ Cfr. E. F. L., pag. 604.

potenza \bar{w}^s si trasformi nella *potenza s-esima di composizione simmetrica di w* , moltiplicando la \bar{w}^s per una opportuna funzione della ξ , indipendente dalla \bar{w} (e quindi « invariabile ») e calcolando poi il residuo del prodotto ottenuto nel punto $\xi = 0$ e derivando infine il risultato rispetto ad una variabile ausiliaria.

Poiché a seconda della funzione « invariabile » adoperata si riesce in tal modo ad « imprimere » sulla potenza ordinaria i coefficienti (*fissi*) che la trasformano nella voluta potenza funzionale (generalizzata), dette funzioni « invariabili » vengono chiamate *funzioni-stampo*.

Così, mentre per calcolare la potenza n -esima di composizione simmetrica del *nucleo* di una equazione funzionale lineare (in forma canonica), cioè il cosiddetto *nucleo iterato n-esimo*, occorrono in generale n integrazioni, (quando detta potenza viene interpretata nel modo consueto), invece se si conosce la *funzione-stampo per la potenza n-esima di composizione simmetrica e la funzione preparatrice n-esima*, bastano *tre integrazioni ed una derivazione, qualunque sia n* .

Si intuisce allora subito come il *nucleo risolvete* di una equazione funzionale lineare (in forma canonica) possa calcolarsi con un numero *finito* di integrazioni quando si siano determinate e calcolate *una volta per sempre* due speciali *funzioni « invariabili »* e precisamente quella che verrà detta la *funzione-stampo generale di composizione simmetrica* e la *funzione preparatrice generale*. E' interessante notare che può considerarsi quale primo esempio di funzione-stampo la funzione χ_n introdotta dal Prof. L. FANTAPPIÈ nella sua Memoria (1) sul *prodotto funzionale proiettivo*, con la quale χ_n è possibile calcolare, mediante un prodotto funzionale simmetrico, l'*indicatrice simmetrica* di un funzionale analitico lineare, quando dello stesso sia nota l'*indicatrice proiettiva*.

In questo lavoro poi, applichiamo i risultati ottenuti soltanto al calcolo *degli operatori che sono funzioni di un dato operatore analitico lineare*, mentre in un prossimo lavoro mostreremo come sia anche possibile calcolare, mediante integrali definiti, il nucleo risolvete dell'equazione integrale di seconda specie di FREDHOLM e di quella di VOLTERRA e conseguentemente si otterrà pure l'integrale generale dell'*equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti variabili di ordine qualunque*. Si generalizzeranno inoltre i risultati al caso delle equazioni funzionali lineari con funzioni incognite in più variabili e si calcolerà il nucleo risolvete di speciali equazioni integro-differenziali il che permetterà di ottenere in forma esplicita l'integrale generale dell'*equazione a derivate*

(1) Cfr. P. F. P., n.º 4, pag. 190.

parziali lineare, a coefficienti variabili, di qualunque ordine ed in qualunque numero di variabili, con le condizioni di CAUCHY su un'ipersuperficie generica.

Una caratteristica del metodo di calcolo basato sull'impiego delle funzioni-stampo è l'arbitrarietà di scelta di queste funzioni, perchè infatti le *funzioni-stampo non sono univocamente determinate*; si potrà quindi in avvenire ricercare quale sia il sistema più semplice per *contrassegnare* i vari termini ed ottenere così le funzioni-stampo più facili a calcolarsi.

Come si vedrà nei nn. seguenti, notevole importanza presenta in questo lavoro l'introduzione di un particolare funzionale analitico lineare «*invariabile*» che permette con un solo calcolo di residuo e successiva derivazione rispetto ad un parametro ausiliario (le due operazioni non sono permutabili) di ottenere «*in termini finiti*» il *prolungamento analitico* di una data funzione (analitica), nota soltanto nell'intorno di un suo punto di regolarità.

Per rendere poi più chiaro questo primo studio sulle funzioni-stampo, mi sono limitato a considerare come domini di variabilità, i più semplici possibili e cioè quelli circolari, come pure ho tralasciato di trattare i sistemi di equazioni funzionali lineari che possono anch'essi avere un inquadramento altrettanto semplice e generale (come mostrerò in un altro lavoro), di quello qui esposto per le equazioni. I risultati potranno in avvenire estendersi a classi di equazioni funzionali molto più generali.

Al Prof. L. FANTAPPÌÈ che mi ha consigliato e guidato esprimo qui la mia grande gratitudine e riconoscenza.

CAPITOLO I

IL FUNZIONALE ANALITICO LINEARE «*PROLUNGAMENTO ANALITICO*», IL PRODOTTO FUNZIONALE GENERALIZZATO E LE FUNZIONI-STAMPO

1. Il funzionale lineare «*prolungamento analitico*». — Si vuole dimostrare che il *prolungamento analitico* di una funzione (analitica) può essere effettuato «*in termini finiti*»⁽¹⁾ mediante un particolare funzionale lineare.

⁽¹⁾ Diremo che un'espressione matematica è «*in termini finiti*», se in essa figurano soltanto segni di funzione, di integrazione e di derivazione, in *numero finito*. Si osservi infatti che il prolungamento analitico interpretato «*classicamente*» richiede per il suo calcolo un numero infinito di derivazioni.

Sia data la funzione analitica $f(x)$ il cui sviluppo in serie di potenze della x :

$$(1,1) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

abbia ρ quale raggio di convergenza. Sia poi x_1 un punto interno alla circonferenza di convergenza $(0, \rho)$ e supponiamo che lo sviluppo della $f(x)$ dedotto dallo sviluppo (1,1) relativamente al punto x_1 , abbia raggio di convergenza $\rho_1 > \rho - |x_1|$. A partire dal valore della $f(x)$ su una qualunque curva chiusa C contenente il punto x_1 e tutta interna alla circonferenza $(0, \rho)$, si vuole calcolare «in termini finiti» la somma di detto sviluppo relativo al punto x_1 , in ogni punto ove questo converga. Lo sviluppo della $f(x)$ in serie di potenze, relativo al punto x_1 , può scriversi nel modo seguente:

$$(1,2) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x - x_1)^k \frac{f^{(k)}(x_1)}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (x - x_1)^k \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t - x_1)^{k+1}} dt \right)$$

dove C è una qualunque curva chiusa contenente il punto x_1 e tutta interna alla circonferenza $(0, \rho)$. Consideriamo ora la particolare funzione che chiameremo *funzione di prolungamento*:

$$(1,3) \quad P_{x_1}(x, t, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_1)^k}{(t - x_1)^{k+1}} \frac{\theta^{k+1}}{k!}$$

certo convergente se $|\theta| \leq 1$, per $t \neq x_1$, ed x qualunque al finito. Nella (1,3) si assume $0! = 1$. Eseguiamo ora il *prodotto funzionale emisimmetrico* ⁽²⁾ della funzione di prolungamento (1,3) per la $f(t)$, relativamente alla variabile t , si avrà:

⁽¹⁾ Indicheremo sempre con (x_0, R) la circonferenza con centro nel punto x_0 e raggio R .

⁽²⁾ Date due funzioni analitiche $v(x)$ e $y(x)$, se esse non hanno punti singolari in comune, esiste sempre una curva chiusa C della sfera complessa x (formata eventualmente da più curve chiuse in numero finito) che separa (curva *separatrice*) i punti singolari di una funzione da quelli dell'altra. Essendo quindi definite e regolari sulla C la $v(x)$ e la $y(x)$, ha senso l'espressione:

$$[1] \quad v(x) y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C v(x) y(x) dx$$

dove l'integrazione curvilinea deve intendersi fatta lungo la C nel verso in cui un osservatore lascia sempre alla sua sinistra i punti singolari della v . Il valore dato dalla [1] è detto *prodotto funzionale emisimmetrico*. E' chiaro poi che: $y(x) v(x) = -v(x) y(x)$, da cui il nome di *emisimmetrico* (cfr. F. A., pag. 55 e segg.).

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi i} \int_C P_{x_1}(x, t, \theta) f(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_1)^k}{(t-x_1)^{k+1}} \frac{\theta^{k!}}{k!} \right) f(t) dt = \\
 (1,4) \quad & = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_1)^k}{k!} \theta^{k!} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t-x_1)^{k+1}} dt \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (x-x_1)^k \frac{\theta^{k!}}{k!} \frac{f^{(k)}(x_1)}{k!}
 \end{aligned}$$

dove la curva C (*separatrice*) è quella stessa considerata per la (1,2). Si osservi ora che lo sviluppo ad ultimo membro della (1,4) differisce dallo sviluppo (1,2) soltanto per i coefficienti $\frac{\theta^{k!}}{k!}$, inoltre esso converge per $|\theta| \leq 1$ qualunque sia x al finito, perciò considerandolo come una serie di potenze di θ convergente nel cerchio $|\theta| < 1$ è derivabile e la serie derivata sarà pure convergente nello stesso campo. Scriviamo allora la serie derivata della (1,4) rispetto a θ :

$$(1,5) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (x-x_1)^k \theta^{k!-1} \frac{f^{(k)}(x_1)}{k!}$$

e notiamo che per $|x-x_1| < \rho_1$ o per $x = x_1$, essendo x_1 un qualunque punto della circonferenza di convergenza (x_1, ρ_1) dove la serie (1,2) converge, la serie (1,5) converge anche per $\theta = 1$, riducendosi alla (1,2), e per un noto teorema di Abel questa convergenza è uniforme in ogni settore d'apertura inferiore a 180° , di vertice nel punto $\theta = 1$ e tutto interno alla circonferenza $|\theta| = 1$.

Per detti valori della x , quindi, la somma della serie derivata (1,5) coincide anche per $\theta = 1$, con la derivata della somma della (1,4), cioè:

$$(1,6) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x-x_1)^k \frac{f^{(k)}(x_1)}{k!} = \frac{\partial}{\partial \theta_{\theta=1}} \frac{1}{2\pi i} \int_C P_{x_1}(x, t, \theta) f(t) dt$$

dove per fissare le idee intenderemo di derivare lungo l'asse reale nell'intorno sinistro di $\theta = 1$. Si osservi poi che la *funzione di prolungamento* è indipendente dalla $f(x)$ e quindi basterà calcolarla *una volta per sempre*.

La (1,6) ci permette così calcolare « in termini finiti » (infatti occorrono soltanto un'integrazione ed una derivazione) la somma delle serie (1,2) in ogni punto ove la serie stessa converge, quando si conosca il valore della funzione $f(x)$ in un intorno *comunque* ristretto del punto x_1 .

E' poi chiaro che il secondo o il terzo membro della (1,6) è un *funzionale F lineare misto* della funzione $f(x)$. Facciamo vedere che F è pure *analitico*. Infatti se nella (1,6) consideriamo la x variabile comunque nel cerchio (x_1, R) con R qualunque > 0 , possiamo definire F nella *regione funzionale* ⁽¹⁾ (A) il cui insieme « caratteristico » A è proprio il cerchio (x_1, R) ⁽²⁾. Inoltre si vede subito che F conserva l'analiticità rispetto ai parametri che figurano nelle *linee analitiche* che penetrano in (A) . Si conclude allora che F è *analitico*.

Dato però il particolare compito di F e cioè quello di *prolungare una funzione $f(x)$ di (A) dall'intorno di x_1 ad un punto qualunque x_0 di A* , è necessario *supporre* che le funzioni di (A) siano note soltanto in un intorno (comunque ristretto) di x_1 , perciò in questo caso, (dato che non possiamo valerci di « prolungamenti analitici ») per calcolare il funzionale F , non si può impiegare la *formula fondamentale* ⁽³⁾ per i funzionali analitici lineari, perchè essa richiede infatti il valore della $f(x)$ lungo una qualunque curva chiusa C' che contenga A e sulla quale la $f(x)$ sia ancora regolare.

Si può poi fare vedere come si possa eseguire, in modo analogo, anche un prolungamento analitico multiplo, cioè formato da più prolungamenti successivi, come pure si possono ottenere prolungamenti molto più generali; tutto ciò però non trova posto in questa trattazione e sarà oggetto di un altro lavoro.

⁽¹⁾ Per *regione funzionale lineare* (A) s'intende l'insieme di tutte le funzioni analitiche $f(x)$ biregolari e definite nell'insieme chiuso A il quale è detto insieme « caratteristico » della regione (A) . Una funzione f è *biregolare* in un punto al finito quando è ivi regolare, è invece biregolare in un punto all' ∞ , quando si può determinare un intorno di questo punto tale che la funzione sia non solo regolare ma anche *nulla* in tutti i punti all' ∞ di questo intorno (cfr. N. F. pp. 633 e 647).

⁽²⁾ Il funzionale F può anche definirsi nella regione funzionale (x_1) (più ampia della regione (A)), cioè in quella di tutte le funzioni regolari in x_1 , basterà infatti per ogni funzione $f(x)$ prendere la x del funzionale misto F variabile nel cerchio di convergenza della f relativo al punto x_1 .

⁽³⁾ Se un funzionale analitico lineare misto G è definito in una regione funzionale (A) , si dice *indicatrice simmetrica* di G la funzione $W(x, \alpha)$ che si ottiene applicando G alla particolare funzione $\frac{1}{1-x\alpha}$ (che per $\frac{1}{\alpha}$ esterno ad A , appartiene alla regione (A)) e si dimostra che per ogni funzione $g(x)$ di (A) , il valore di G è dato dal *prodotto funzionale emisimmetrico* (cfr. nota ⁽¹⁾ a pag. 10) della $\frac{1}{\alpha} W\left(x, \frac{1}{\alpha}\right)$ per la $g(\alpha)$, cioè :

$$[1] \quad G[g(t); x] = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\alpha} w\left(x, \frac{1}{\alpha}\right) g(\alpha) d\alpha$$

dove, per definizione, la curva *separatrice* C contiene l'insieme A ed è tale che, per x variabile in una certa regione R , separa i punti singolari, rispetto alla variabile α della $\frac{1}{\alpha} w\left(x, \frac{1}{\alpha}\right)$ da quelli della $g(\alpha)$. La [1] è la *formula fondamentale* per i funzionali analitici lineari (misti), (cfr. F. A. nn. 26 e 33 ed N. F. nn. 13 e 16).

Nel numero seguente considereremo ancora il prolungamento analitico in un caso particolare che ci sarà molto utile nel seguito.

2. Prolungamento analitico in un caso particolare. — Sia data una funzione analitica $f(x)$ il cui sviluppo in serie di potenze della x :

$$(2,1) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

abbia raggio di convergenza unitario ed inoltre *converga anche per $x = 1$* ⁽¹⁾. Supponendo di conoscere il valore della $f(x)$ soltanto su una curva chiusa C contenente l'origine e tutta interna alla circonferenza $(0,1)$, si vuole calcolare la somma della (2,1) nel punto $x = 1$ « in termini finiti ». E' chiaro che basterà mettere nella (1,6)

$$(2,2) \quad x_1 = 0 \quad ; \quad x = 1$$

ottenendosi:

$$(2,3) \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{\partial}{\partial \theta_{\theta=1}} \frac{1}{2\pi i} \int_C P_0(1, t, \theta) f(t) dt$$

dove deve intendersi che il limite per $x \rightarrow 1$ venga eseguito lungo un cammino interno e non tangente alla circonferenza $(0,1)$.

Nel seguito indicheremo la funzione $P_0(1, t, \theta)$ più semplicemente con $P_0(t, \theta)$, cioè:

$$(2,4) \quad P_0(t, \theta) = P_0(1, t, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{t^{k+1}} \frac{\theta^{k!}}{k!}$$

3. Alcune corrispondenze biunivoche nel campo dei numeri interi. — Consideriamo ora le *coppie ordinate* (k, h) con k ed h interi positivi eventualmente nulli e dimostriamo che se ad ogni coppia (k, h) facciamo corrispondere il numero intero $(2k + 1) 2^h$, la corrispondenza è biunivoca (si osservi che $(2k + 1) 2^h = 1$ per $k = h = 0$). Infatti ogni numero in-

⁽¹⁾ Se è dato lo sviluppo della $f(x)$ in serie di potenze della x relativo al punto $x_1 \neq 0$ con raggio di convergenza $\rho_1 \neq 1$, convergente nel punto x_0 della circonferenza (x_1, ρ_1) , possiamo sempre, con il cambiamento di variabile $x = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$, riportarci al caso particolare ora trattato.

tero positivo può sempre porsi ed in un solo modo nella forma $2^q N$, dove N è dispari, e ad esso si può far corrispondere una ed una sola coppia ordinata (k, h) ponendo :

$$(3,1) \quad k = \frac{N-1}{2}; \quad h = q$$

quindi se si supponesse che al numero $2^q N = (2k+1) 2^h$ corrisponda anche l'altra coppia ordinata (k', h') dovrebbe essere :

$$(3,2) \quad 2^q N = (2k'+1) 2^{h'}$$

cioè

$$(3,3) \quad (2k'+1) 2^{h'} = (2k+1) 2^h$$

ma se è p. es. $h' > h$ dalla (3,3) è pure :

$$(3,4) \quad (2k'+1) 2^{h'-h} = 2k+1$$

e dato che $2k+1$ è dispari, si arriva ad una contraddizione dovendo essere necessariamente $h' = h$ ed allora dalla (3,4) discende pure $k' = k$.

Resta così dimostrata la corrispondenza biunivoca tra tutte le *coppie ordinate* (k, h) e tutti i numeri interi positivi $(2k+1) 2^h$. Analogamente possiamo definire una corrispondenza biunivoca tra le *terne ordinate* (h_1, h_2, h_3) di numeri interi positivi o nulli e la totalità dei numeri interi ≥ 3 . Ogni *terna ordinata* (h_1, h_2, h_3) , può considerarsi infatti come una *coppia ordinata* i cui elementi sono : la coppia ordinata (h_1, h_2) ed il numero h_3 , cioè :

$$(3,5) \quad (h_1, h_2, h_3) = ((h_1, h_2), h_3)$$

ma dato che le *coppie ordinate* (h_1, h_2) sono in corrispondenza biunivoca con i numeri $(2h_1+1) 2^{h_2}$ possiamo dire che le *terne ordinate* (h_1, h_2, h_3) sono in corrispondenza biunivoca con le *coppie ordinate* :

$$(3,6) \quad \left([(2h_1+1) 2^{h_2}], h_3 \right)$$

ma queste sono a loro volta in corrispondenza biunivoca con i numeri interi

$$(3,7) \quad \left(2 [(2h_1+1) 2^{h_2}] + 1 \right) 2^{h_3}$$

e quindi in definitiva le terne ordinate (h_1, h_2, h_3) sono in corrispondenza biunivoca con i numeri interi (3,7) che possono anche scriversi così :

$$(3,8) \quad h_1 2^{h_2 + h_3 + 2} + 2^{h_2 + h_3 + 1} + 2^{h_3}$$

In generale si dimostra, in modo perfettamente analogo, che le m^{uple} ordinate (h_1, h_2, \dots, h_m) sono in corrispondenza biunivoca con i numeri interi $(\geq 2^{m-1} - 1)$:

$$(3,9) \quad h_1 2^{h_2 + h_3 + \dots + h_m + m - 1} + \sum_{s=2}^m 2^{h_s + h_{s+1} + \dots + h_m + m - s}$$

i quali verranno indicati succintamente con

$$(3,10) \quad [h_1, h_2, \dots, h_m]$$

oppure se non si debbono precisare i valori dei termini h , verranno soltanto indicati con

$$(3,11) \quad h \boxed{m}$$

Consideriamo ora le due somme :

$$(3,12) \quad E_1 = \sum_{s=1}^n (n+1)^{p_s}; \quad E_2 = \sum_{s=1}^n (n+1)^{q_s}$$

dove p_1, p_2, \dots, p_n e q_1, q_2, \dots, q_n sono interi positivi (eventualmente nulli). Facciamo vedere che $E_1 = E_2$ soltanto quando le due n^{uple} (*non ordinate*) (p_1, p_2, \dots, p_n) e (q_1, q_2, \dots, q_n) risultano formate con gli stessi elementi e quindi non solo ad ogni n^{upla} non ordinata di numeri p_1, p_2, \dots, p_n corrisponde un numero E ma anche, viceversa, noto uno di questi numeri E , questo non può corrispondere che ad una sola n^{upla} (*non ordinata*). Scriviamo infatti l'equazione algebrica nella x :

$$(3,13) \quad x^{p_1} + x^{p_2} + \dots + x^{p_n} - (x^{q_1} + x^{q_2} + \dots + x^{q_n}) = 0$$

nella quale intanto, i binomi $x^p - x^q$ con $p = q$ vengono eliminati; se restassero dei termini ve ne sarebbero alcuni p. es. del tipo x^g in cui la potenza avrebbe il minimo esponente g .

Se r fossero le potenze x^p ed s quelle x^q per le quali risultasse $p = q = g$, la (3,13) dopo la suddetta eliminazione prenderebbe la forma :

$$(3,14) \quad x^{p_{\kappa_1}} + x^{p_{\kappa_2}} + \dots + x^{p_{\kappa_n}} - (x^{q_{h_1}} + x^{q_{h_2}} + \dots + x^{q_{h_v}} + sx^g) + (r-s)x^g = 0$$

Intanto è chiaro che dovrebbe essere $r \neq s$ (perché altrimenti per l'eliminazione prima fatta le potenze x^g non figurebbero più nella (3,14)), dividendo allora la (3,14) per x^g si otterrebbe l'equazione :

$$(3,15) \quad x^{p_{\kappa_1} - g} + \dots + x^{p_{\kappa_n} - g} - x^{q_{h_1} - g} - \dots - x^{q_{h_v} - g} + r - s = 0$$

Dato poi che $r < n$ ed $s < n$, ne viene che essendo $r \neq s$ sarebbe :

$$(3,16) \quad 0 < |r - s| < n$$

ma allora il numero $(n + 1)$ non potrebbe essere radice dell'equazione algebrica (3,15) a coefficienti interi dato che esso non è divisore di $r - s$.

Si conclude che solo se le due n^{uple} non ordinate p_1, p_2, \dots, p_n e q_1, q_2, \dots, q_n sono formate con gli stessi elementi si avrà $E_1 = E_2$, in ogni altro caso invece sarà $E_1 \neq E_2$.

Si tenga presente, per il seguito, che E_1 ed E_2 sono numeri interi positivi.

4. Prodotto funzionale simmetrico e prodotto funzionale generalizzato. Le funzioni preparatrici e le funzioni-stampo. — Ricordiamo ora brevemente la definizione del *prodotto funzionale simmetrico* ⁽¹⁾ introdotto dal Prof. L. FANTAPPIÈ.

Date due funzioni analitiche $f(x)$ e $g(x)$, se la funzione $\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$ non ha punti singolari in comune con la $g(x)$, esiste sempre una curva chiusa C separatrice degli insiemi di singolarità di dette funzioni e quindi ha senso l'integrale :

$$(4,1) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) g(x) dx$$

dove l'integrazione deve intendersi fatta lungo la C nel senso in cui un osservatore lasci sempre alla sua sinistra i punti singolari di $\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$. Il

⁽¹⁾ Cfr. F. A. pp. 58 e 79 ed N. F.

valore dato dalla (4,1) è detto *prodotto funzionale simmetrico* della $f(x)$ per la $g(x)$ e si indica anche brevemente con il simbolo :

$$(4,2) \quad f(\overset{\circ}{x}) g(\overset{\circ}{x}) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) g(x) dx$$

Si può dire che il *prodotto funzionale simmetrico* della $f(x)$ per la $g(x)$ è il *prodotto funzionale emisimmetrico* della $\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$ per la $g(x)$, (cfr. nota ⁽²⁾ a pag. 6).

Il « prodotto » (4,1) deve la sua denominazione di *simmetrico* al fatto che, come si prova facilmente, risulta :

$$(4,3) \quad f(\overset{\circ}{x}) g(\overset{\circ}{x}) = g(\overset{\circ}{x}) f(\overset{\circ}{x})$$

Se poi le due funzioni f e g sono regolari nell'origine e gli sviluppi relativi :

$$(4,4) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad g(x) = \sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h$$

hanno rispettivamente raggi di convergenza ϱ_1 e ϱ_2 con $\varrho_1 \varrho_2 > 1$, si può dare del *prodotto funzionale simmetrico* il seguente sviluppo in serie :

$$(4,5) \quad f(\overset{\circ}{x}) g(\overset{\circ}{x}) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{1}{x^k} \right) \left(\sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$$

dove per la curva *separatrice* C può prendersi una circonferenza $(0, R)$ con $\frac{1}{\varrho_1} < R < \varrho_2$ (dato che la $\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$ è regolare per x non interno a C mentre la $g(x)$ è regolare per x non esterno a C).

La serie a terzo membro della (4,5) è *assolutamente* convergente. Facciamo ora vedere come, tenendo presente l'espressione (4,5) del prodotto funzionale simmetrico, sia possibile generalizzarne il concetto.

Siano infatti date le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ regolari nell'intorno dell'origine e siano esse ancora rappresentate dagli stessi sviluppi in serie (4,4) dove però ora non facciamo nessuna ipotesi restrittiva sui raggi di convergenza.

Sia dato inoltre un insieme $J(Q_{k,h})$, di coefficienti ⁽¹⁾, dipendenti da due indici interi :

$$(4,6) \quad Q_{k,h} \quad \left(\begin{array}{l} k = 0, 1, 2, \dots \\ h = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right)$$

dove il generico $Q_{k,h}$ può essere funzione di certi parametri $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$, ed eventualmente anche della stessa x .

Se la serie :

$$(4,7) \quad \sum_0^{\infty} a_k b_h Q_{k,h}$$

per $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$; x comunque variabili rispettivamente in certi domini D_1, D_2, \dots, D_s ; D_x , converge *assolutamente*, diremo che la sua somma è il *prodotto funzionale generalizzato di trama $J(Q_{k,h})$ della f per la g* ⁽²⁾. Detto « prodotto » verrà indicato brevemente con l'espressione simbolica :

$$(4,8) \quad [f(x) \overleftarrow{g(x)}]_{J(Q_{k,h})}$$

inoltre si osservi che esso non è simmetrico, essendo infatti (in generale). $Q_{h,h} \neq Q_{k,k}$, sarà pure :

$$(4,9) \quad [g(x) \overleftarrow{f(x)}]_{J(Q_{k,h})} = \sum_0^{\infty} b_k a_h Q_{k,h} \neq [f(x) \overleftarrow{g(x)}]_{J(Q_{k,h})}$$

Il prodotto funzionale in questione è stato chiamato « generalizzato » perché il *prodotto funzionale (simmetrico)* espresso dalla (4,5) ne è un caso particolare come subito si verifica osservando che la serie (4,7) coincide con quella ad ultimo membro della (4,5) quando l'insieme $J(Q_{k,h})$ viene definito nel modo seguente :

$$(4,10) \quad Q_{k,h} = \begin{cases} 0 & \text{per } k \neq h \\ 1 & \text{per } k = h \end{cases}$$

Dimostriamo ora che nell'ipotesi della convergenza *assoluta* della (4,7), note le funzioni f e g rispettivamente lungo due curve chiuse C_1 e C_2 ,

⁽¹⁾ L'insieme $J(Q_{k,h})$ può considerarsi anche come una matrice infinita (cfr. F. A. pag. 116).

⁽²⁾ In questo lavoro consideriamo soltanto il prodotto funzionale di funzioni f e g entrambe regolari nell'origine, ma evidentemente i risultati possono generalizzarsi.

interne ai relativi cerchi di convergenza degli sviluppi (4,5) e contenenti l'origine, è possibile calcolare la somma della (4,7) « in termini finiti ».

Si osservi infatti che i numeri interi positivi k possono essere messi in corrispondenza biunivoca con le coppie ordinate $(k,1)$ ed analogamente i numeri interi positivi h possono essere messi in corrispondenza biunivoca con le coppie ordinate $(h,2)$; è intanto importante notare che una coppia ordinata $(k,1)$ non coincide mai con una coppia ordinata $(h,2)$.

Se ora abbiamo mescolati insieme coefficienti a_k e coefficienti b_h , preso un qualunque numero intero positivo q , esso individua sia il coefficiente a_q sia quello b_q ma se invece contrassegniamo il generico coefficiente a_k con la coppia ordinata $(k,1)$ e quello b_h con la coppia ordinata $(h,2)$ è chiaro che ora la coppia ordinata $(q,1)$ individua soltanto il termine $a_q = a_{(q,1)}$.

Consideriamo allora la funzione indipendente dalla f , dalla g e dall'insieme $J(Q_{k,h})$, che diremo *preparatrice anteriore* :

$$(4,11) \quad M_a(xr, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} (xr)^k \xi^{3[k,1]}$$

dove $|\xi| = 1$ ed $|xr| < 1$, inoltre gli esponenti $[k,1] = (2k+1)2$ sono i numeri interi in corrispondenza biunivoca con le coppie ordinate $(k,1)$ e dei quali si è già parlato al n. 3. Si tenga presente che un numero $[k,1]$ non coincide mai con un numero $[h,2]$.

Nelle ipotesi fatte quindi la serie (4,11) converge ed assolutamente. Il prodotto funzionale simmetrico della M_a per la $f(x)$ ci dà quella che diremo la *preparata anteriore* della $f(x)$, cioè :

$$(4,12) \quad \begin{aligned} M_a(\overset{\circ}{x}r, \overset{\circ}{\xi}) f(\overset{\circ}{x}) &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{1}{x} M_a\left(\frac{r}{x}, \xi\right) f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \xi^{3[k,1]} = \bar{f}_a(\xi, r) \end{aligned}$$

dove nella $\frac{1}{x} M_a\left(\frac{r}{x}, \xi\right)$ si è preso $|r| \leq \varrho'_r < x_{0,1}$ ⁽¹⁾, essendo $x_{0,1}$ il minimo dei moduli dei punti della curva C_1 lungo la quale, come si è detto, è nota la $f(x)$.

(1) L'indice r di ϱ'_r indica soltanto che quest'ultimo è relativo alla variabile r ma non che ne dipenda.

Analogamente si definisce la *preparatrice posteriore* con l'espressione :

$$(4,13) \quad M_p(xr, \xi) = \sum_{h=0}^{\infty} (xr)^h \xi^{3^{[h,2]}}$$

dove gli esponenti $[h, 2] = (2h + 1) 2^2$ (cfr. n. 3) sono in corrispondenza biunivoca con le coppie ordinate $(h, 2)$.

La funzione M_p è, come la M_a , indipendente dalla f , dalla g e dall'insieme $J(Q_{k,h})$.

Il *prodotto funzionale simmetrico* :

$$(4,14) \quad \begin{aligned} M_p(\overset{\circ}{x}r, \overset{\circ}{\xi}) g(\overset{\circ}{x}) &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{1}{x} M_p\left(\frac{r}{x}, \xi\right) g(x) dx = \sum_{h=0}^{\infty} b_h r^h \xi^{3^{[h,2]}} = \bar{g}_p(\xi, r) \end{aligned}$$

dà per risultato la funzione che chiameremo *preparata posteriore* della $g(x)$. Nella (4,14) per la funzione $\frac{1}{x} M_p\left(\frac{r}{x}, \xi\right)$ si è preso $|r| \leq \varrho_r'' < x_{o,2}$ essendo $x_{o,2}$ il minimo dei moduli dei punti della curva C_2 lungo la quale sono dati i valori della $g(x)$.

Definiamo infine una terza funzione indipendente dalle funzioni f e g ma dipendente invece dall'insieme $J(Q_{k,h})$, cioè quella che chiameremo la *funzione-stampo di trama* $J(Q_{k,h})$:

$$(4,15) \quad S_{J(Q)}(\xi, r) = \sum_{\substack{\infty \\ 0}}^{\infty} r^{m_{\bar{k}, \bar{h}}} Q_{\bar{k}, \bar{h}} \xi^{-\left(3^{[\bar{k}, 1]} + 3^{[\bar{h}, 2]}\right)}$$

nella quale è ancora $|\xi| = 1$ ed $|r| \leq \varrho_r < 1$ e gli esponenti interi positivi $m_{\bar{k}, \bar{h}}$ sono presi in modo che, fissato u reale positivo qualunque minore di 1, sia :

$$(4,16) \quad |r^{m_{\bar{k}, \bar{h}}} Q_{\bar{k}, \bar{h}}| < u^{\bar{k} + \bar{h}}$$

che è certo soddisfatta quando :

$$(4,17) \quad m_{\bar{k}, \bar{h}} > \frac{(\bar{k} + \bar{h}) \log u - \log |Q_{\bar{k}, \bar{h}}|}{\log \varrho_r}$$

In queste ipotesi la serie (4,15) è totalmente convergente per $|\xi| = 1$ perchè maggiorata dalla serie convergente :

$$(4,18) \quad \sum_0^{\infty} u^{\bar{k} + \bar{h}} = \left(\frac{1}{1-u} \right)^2$$

Consideriamo poi il prodotto (ordinario) : $S_{J(Q)}(\xi, r) \bar{f}_a(\xi, r) \bar{g}_p(\xi, r)$ e scriviamone lo sviluppo in serie, sostituendo alle singole funzioni i rispettivi sviluppi, avremo :

$$(4,19) \quad S_{J(Q)}(\xi, r) \bar{f}_a(\xi, r) \bar{g}_p(\xi, r) = \\ = \sum_0^{\infty} a_k b_h Q_{\bar{k}, \bar{h}} \xi^{(3^{[k,1]} + 3^{[h,2]}) - (3^{[\bar{k},1]} + 3^{[\bar{h},2]})} r^{k+h+m_{\bar{k}, \bar{h}}}$$

dove si è preso $|r| \leq \bar{q}$, essendo \bar{q} il minore dei tre valori q_r' , q_r'' e q_r . Per quanto si è dimostrato al n. 3 i due numeri interi

$$(4,20) \quad 3^{[k,1]} + 3^{[h,2]} \quad \text{e} \quad 3^{[\bar{k},1]} + 3^{[\bar{h},2]}$$

sono uguali soltanto quando le due coppie *non ordinate* ($[k,1]$, $[h,2]$) e ($[\bar{k},1]$, $[\bar{h},2]$) risultano formate con gli stessi elementi, ma in questo caso non può mai essere, come si è detto, $[k,1] = [\bar{h},2]$ oppure $[h,2] = [\bar{k},1]$, quindi i numeri (4,20) sono uguali solo quando è :

$$(4,21) \quad \begin{aligned} [k,1] &= [\bar{k},1] \\ [h,2] &= [\bar{h},2] \end{aligned}$$

cioè soltanto quando risulta

$$k = \bar{k}; \quad h = \bar{h}$$

Moltiplichiamo ora il prodotto (4,19) per $\frac{1}{2\pi i \xi}$ e integriamo termine a termine (come è permesso per la totale convergenza) lungo la circonferenza $C_{\xi} = (0,1)$. In tutti i termini nei quali è $k = \bar{k}$ ed $h = \bar{h}$ la potenza della ξ , presente nella (4,19), viene sostituita dall'unità mentre tutti gli altri termini vengono annullati, cioè si ha in definitiva :

$$(4,22) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\xi} \frac{d\xi}{\xi} S_{J(Q)}(\xi, r) \bar{f}_a(\xi, r) \bar{g}_p(\xi, r) = \sum_0^\infty \sum_{k,h} a_k b_h Q_{k,h} r^{k+h+m_{k,h}}$$

Per ottenere la serie (4,7) non resta che eliminare il parametro r portandolo al valore unitario.

Ora la (4,22) per ipotesi converge *assolutamente* per $r = 1$ e quindi può essere ordinata secondo le potenze crescenti della r dato che essa convergerà *assolutamente* anche per $|r| \leq 1$.

La (4,22) equivale così ad una serie di potenze della r convergente per $|r| \leq 1$, ci troviamo allora nel caso del particolare « prolungamento » studiato al n. 2, dove ora la funzione da *prolungare* è nota (p. es.) sulla circonferenza $C_r = (0, \bar{\rho}_r)$, applicando quanto si è trovato al n. 2, avremo infine :

$$(4,23) \quad \begin{aligned} [f(x) \bar{g}(x)]_{J(Q_{k,h})} &= \sum_0^\infty \sum_{k,h} a_k b_h Q_{k,h} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta_{\theta=1}} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_r} dr \int_{C_\xi} \frac{d\xi}{\xi} P_0(r, \theta) S_{J(Q)}(\xi, r) \bar{f}_a(\xi, r) \bar{g}_p(\xi, r) \end{aligned}$$

espressione che ci dà la somma della serie (4,7) « in termini finiti » a partire dalle funzioni f e g e dalle funzioni M_a, M_p ed $S_{J(Q)}$, le quali essendo indipendenti dalle funzioni f e g , possono impiegarsi per infiniti prodotti funzionali e saranno perciò *calcolate una volta per sempre*.

Facciamo poi osservare che il nome di *funzione-stampo* dato alla $S_{J(Q)}$, dipende dal fatto che il suo compito, come si è visto, consiste in sostanza nell'*imprimere* nei vari elementi, costituenti lo sviluppo in serie del prodotto ordinario $\bar{f}_a \cdot \bar{g}_p$, i coefficienti adatti affinché il risultato sia il prodotto funzionale voluto. Sempre figuratamente potremmo dire che nella (4,23) la moltiplicazione del prodotto $S_{J(Q)} \cdot \bar{f}_a \cdot \bar{g}_p$ per la funzione $\frac{P_0}{\xi}$, i calcoli di residuo rispetto alla ξ ed alla r e la derivazione rispetto a θ nel punto $\theta = 1$, rappresentano, nel loro complesso, il « torchio » di questa stamperia ideale.

Ho esposto questa descrizione *figurata* del prodotto funzionale generalizzato, perché credo sia utile nel seguito per potere fissare più facilmente nella mente il succedersi dei vari calcoli.

È superfluo notare che per ottenere l'altro prodotto funzionale :

$$[g(x) \bar{f}(x)]_{J(Q_{k,h})}$$

occorrerà considerare la *preparata anteriore* della g e quella *posteriore* della f , mentre la *funzione-stampo* $S_{J(O)}$ resta invariata.

In modo perfettamente analogo si può definire il prodotto funzionale generalizzato di due funzioni f e g di più variabili.

Siano infatti date le funzioni.

$$(4,24) \quad \begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_m) &= \sum_0^{\infty} a_{k_1, k_2, \dots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m} \\ g(x_1, x_2, \dots, x_m) &= \sum_0^{\infty} b_{h_1, h_2, \dots, h_m} x_1^{h_1} x_2^{h_2} \dots x_m^{h_m} \end{aligned}$$

convergenti la prima per $|x_s| < \varrho_{1,s}$ e la seconda per $|x_s| < \varrho_{2,s}$ con $s = 1, 2, \dots, m$. Supponiamo poi che la f sia nota per x_1, x_2, \dots, x_m rispettivamente variabili sulle curve chiuse $C_{1,1}; C_{1,2}; \dots; C_{1,m}$ dove la generica $C_{1,s}$ del piano complesso x_s contiene l'origine ed è interna alla circonferenza $(O, \varrho_{1,s})$ e che la g sia nota per x_1, x_2, \dots, x_m variabili rispettivamente sulle curve $C_{2,1}; C_{2,2}; \dots; C_{2,m}$ delle quali la generica $C_{2,s}$ contiene l'origine $x_s = 0$ ed è interna alla circonferenza $(O, \varrho_{2,s})$.

Dato poi l'insieme $J(Q_{k_1, k_2, \dots, k_m; h_1, h_2, \dots, h_m})$ dei coefficienti:

$$(4,25) \quad Q_{k_1, k_2, \dots, k_m; h_1, h_2, \dots, h_m} \quad \left(\begin{array}{l} k_s, h_s = 0, 1, 2, \dots \\ s = 1, 2, \dots, m \end{array} \right)$$

in generale funzioni di più parametri $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ ed eventualmente anche delle variabili x_1, x_2, \dots, x_m , se accade che la serie:

$$(4,26) \quad \sum_0^{\infty} a_{k_1, k_2, \dots, k_m} b_{h_1, h_2, \dots, h_m} Q_{k_1, \dots, k_m; h_1, \dots, h_m}$$

risulta *assolutamente* convergente per $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s; x_1, x_2, \dots, x_m$ comunque variabili rispettivamente in certi domini $D_1, D_2, \dots, D_s; D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_m}$, la sua somma si dirà il *prodotto funzionale generalizzato di trama* $J(Q_{k_1, \dots, k_m; h_1, \dots, h_m})$ della f per la g e si indicherà brevemente con il simbolo:

$$(4,27) \quad [f(x_1, x_2, \dots, x_m) g(x_1, x_2, \dots, x_m)] J(Q_{k_1, k_2, \dots, k_m; h_1, h_2, \dots, h_m})$$

Il calcolo del « prodotto » (4,26) si conduce in modo perfettamente analogo a quello seguito per il calcolo del « prodotto » (4,7):

La *preparatrice anteriore* sarà ora la funzione :

$$(4,28) \quad M_a(x_1 r, x_2 r, \dots, x_m r; \xi) = \sum_0^{\infty} (x_1 r)^{k_1} (x_2 r)^{k_2} \dots (x_m r)^{k_m} \xi^{3^{[k_1, k_2, \dots, k_m, 1]}}$$

dove i numeri interi positivi $[k_1, k_2, \dots, k_m, 1]$, come si è dimostrato al n. 3 sono in corrispondenza biunivoca con le $(m+1)^{\text{uplc}}$ ordinate $(k_1, k_2, \dots, k_m, 1)$ e poiché l'ultimo elemento, costituito dall'unità, è costante essi sono in corrispondenza biunivoca anche con le m^{uplc} ordinate (k_1, k_2, \dots, k_m) . Nella (4,28) si ha ancora $|\xi| = 1$ ed $|x_s r| < 1$ con $s = 1, 2, \dots, m$. Analogamente si definisce la *preparatrice posteriore* con l'espressione :

$$(4,29) \quad M_p(x_1 r, x_2 r, \dots, x_m r; \xi) = \sum_0^{\infty} (x_1 r)^{h_1} (x_2 r)^{h_2} \dots (x_m r)^{h_m} \xi^{3^{[h_1, h_2, \dots, h_m, 2]}}$$

e infine la *funzione-stampo di trama* $J(Q_{k_1, k_2, \dots, k_m; h_1, h_2, \dots, h_m})$:

$$(4,30) \quad S_{J(Q)}(\xi, r) = \sum_0^{\infty} r^{m \bar{k}_1, \dots, \bar{k}_m; \bar{h}_1, \dots, \bar{h}_m} Q_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_m; \bar{h}_1, \dots, \bar{h}_m} \xi^{-\left(3^{[\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_m, 1]} + 3^{[\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_m, 2]}\right)}$$

dove è $|\xi| = 1$, $|r| \leq \varrho_r < 1$ ed

$$m \bar{k}_1, \dots, \bar{k}_m; \bar{h}_1, \dots, \bar{h}_m > (1/\log \varrho_r) [(\bar{k}_1 + \dots + \bar{k}_m + \bar{h}_1 + \dots + \bar{h}_m) \log u - \log |Q_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_m; \bar{h}_1, \dots, \bar{h}_m}|]$$

Calcolate poi le *preparate, anteriore* della f e *posteriore* della g ;

$$(4,31) \quad \begin{aligned} \bar{f}_a(\xi, r) &= M_a(\dot{x}_1 r, \dots, \dot{x}_m r; \xi) f(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_m) = \sum_0^{\infty} a_{k_1, \dots, k_m} \xi^{3^{[k_1, \dots, k_m, 1]}} \sum_{l^s=1}^m k_s \\ \bar{g}_p(\xi, r) &= M_p(\dot{x}_1 r, \dots, \dot{x}_m r; \xi) g(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_m) = \sum_0^{\infty} b_{h_1, \dots, h_m} \xi^{3^{[h_1, \dots, h_m, 2]}} \sum_{l^s=1}^m h_s \end{aligned}$$

analogamente al caso delle funzioni di una sola variabile si trova :

$$(4,32) \quad \begin{aligned} & [f(\overleftarrow{x}_1, \overleftarrow{x}_2, \dots, \overleftarrow{x}_m) g(\overleftarrow{x}_1, \overleftarrow{x}_2, \dots, \overleftarrow{x}_m)] J(Q_{k_1, \dots, k_m; h_1, \dots, h_m}) = \\ & = \frac{\partial}{\partial \theta_{\theta=1}} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_r} dr \int_{C_{\bar{\xi}}} \frac{d\xi}{\xi} P_0(r, \theta) S_{J(Q)}(\xi, r) \bar{f}_a(\xi, r) \bar{g}_p(\xi, r) \end{aligned}$$

dove C_r è la circonferenza $(O, \bar{\varrho}_r)$ essendo $\bar{\varrho}_r$ il minore tra ϱ_r e ϱ'_r , se ϱ'_r è un qualunque prefissato numero $< X$ dove X è il minimo dei moduli dei punti delle curve $C_{1,1}; C_{1,2}; \dots; C_{1,m}$ e $C_{2,1}; C_{2,2}; \dots; C_{2,m}$. Se $f = g$ la (4,22) e la (4,32) ci danno il *quadrato* o *potenza seconda funzionale (generalizzata)* rispettivamente di trama $J(Q_{k,h})$ e $J(Q_{k_1, \dots, k_m; h_1, \dots, h_m})$ della funzione f , secondo che questa dipenda da una o da m variabili. Analogamente potrebbe definirsi la *potenza n^{esima} funzionale* della f , ma, come vedremo nei nn. seguenti, approfittando della permutabilità dei fattori (basta pensare alla definizione di *potenza*), è possibile ridurre notevolmente il numero delle operazioni e precisamente a renderlo *independente* da n .

5. **Potenza n^{esima} funzionale generalizzata delle funzioni di una sola variabile.** — Siano dati: la funzione analitica

$$(5,1) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

(dove la serie a secondo membro converga per $|x| < \varrho$) e l'insieme (1) $J(Q_{k_1, k_2, \dots, k_n})$ dei coefficienti:

$$(5,2) \quad Q_{k_1, k_2, \dots, k_n} \quad \left(\begin{array}{l} k_s = 0, 1, 2, \dots \\ s = 1, 2, \dots, n \end{array} \right)$$

i quali possono essere funzioni della x e di altre variabili $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$. Supponiamo poi che converga *assolutamente* la serie:

$$(5,3) \quad \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{\infty} a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_n} Q_{k_1, k_2, \dots, k_n}$$

per $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$; x comunque variabili rispettivamente in certi domini $D_1, D_2, \dots, D_s; D_x$.

Se ora scriviamo lo sviluppo in serie di potenze della x , della potenza n^{esima} (ordinaria) della $f(x)$, cioè:

$$(5,4) \quad f^n(x) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{\infty} a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_n} x^{k_1 + k_2 + \dots + k_n}$$

(1) Per semplicità di scrittura (non potendo esserci equivoci) indicheremo nel seguito l'insieme $J(Q_{k_1, k_2, \dots, k_n})$ soltanto con $J(Q)$.

e lo confrontiamo con quello dato dalla (5,3), è allora naturale chiamare la somma di quest'ultima serie: *potenza n^{esima} funzionale di trama J(Q)* della funzione $f(x)$, che indicheremo simbolicamente così:

$$(5,5) \quad [f^n(x)]_{J(Q)} = \sum_0^{\infty} a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_n} Q_{k_1, k_2, \dots, k_n}$$

Inoltre, dato il valore della funzione $f(x)$ lungo una curva chiusa C contenente l'origine e tutta interna alla circonferenza $(0, \rho)$, si vuole calcolare detta potenza n^{esima} funzionale in *termini finiti*, supposte note certe funzioni indipendenti dalla $f(x)$, che ora preciseremo.

Consideriamo infatti la funzione (indipendente dalla $f(x)$) che chiameremo *preparatrice n^{esima} di 1° grado* (1):

$$(5,7) \quad M_{n,1}(xr, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} (xr)^k \xi^{(n+1)^k}$$

assolutamente convergente per $|\xi| = 1$ ed $|xr| < 1$.

Calcoliamo poi, come è possibile, il *prodotto funzionale simmetrico*:

$$(5,8) \quad \begin{aligned} M_{n,1}(\bar{x}r, \bar{\xi}) f(\bar{x}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{x} M_{n,1}\left(\frac{r}{x}, \xi\right) f(x) dx = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \xi^{(n+1)^k} = \bar{f}_n(\xi, r) \end{aligned}$$

dove si è preso per la convergenza della $M_{n,1}\left(\frac{r}{x}, \xi\right)$ per x su C e fuori della C , $|r| \leq \rho', < x_0$ se x_0 è il minimo dei moduli dei punti della curva C lungo la quale è nota la $f(x)$.

La \bar{f}_n verrà detta la *preparata n^{esima}* della f .

Scriviamo lo sviluppo in serie della potenza n^{esima} (ordinaria) della \bar{f}_n :

$$(5,9) \quad \bar{f}_n^n(\xi, r) = \sum_0^{\infty} a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_n} \xi^{\sum_{s=1}^n (n+1)^{k_s}} r^{\sum_{s=1}^n k_s}$$

(1) Il grado indica il numero delle variabili della funzione a cui è relativa la preparatrice.

nella quale il monomio $a_{k_1} \cdot a_{k_2} \dots a_{k_n}$ può presentarsi un certo numero di volte ≥ 1 , questo numero lo indicheremo con $\omega_{k_1, k_2, \dots, k_n}$. Dato che nella (5,9) ogni n^{upla} ordinata (k_1, k_2, \dots, k_n) si presenta *una volta sola*, il generico monomio $a_{k_1} \cdot a_{k_2} \dots a_{k_n}$ figura tante volte quante sono le permutazioni con ripetizione degli n elementi k_1, k_2, \dots, k_n . Nel caso più generale gli n elementi k_1, k_2, \dots, k_n comprendono q gruppi di elementi, con $q \leq n$, ciascuno formato da elementi uguali tra loro e precisamente :

$$(5,10) \quad \begin{array}{l} p_1 \text{ elementi uguali ad } a_{s_1} \\ p_2 \quad \text{»} \quad \quad \quad \text{»} \quad \text{»} \quad a_{s_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_q \quad \text{»} \quad \quad \quad \text{»} \quad \text{»} \quad a_{s_q} \end{array}$$

con $a_{s_1}, a_{s_2}, \dots, a_{s_q}$ tutti diversi; è noto allora che : ⁽¹⁾

$$(5,11) \quad \omega_{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{n!}{p_1! p_2! \dots p_q!}$$

(dove si osserviche il valore di $\omega_{k_1, k_2, \dots, k_n}$ *non dipende dall'ordine* della n^{upla} k_1, k_2, \dots, k_n , ma soltanto dagli elementi componenti).

Consideriamo poi la particolare funzione, che verrà detta *funzione-stampo per la potenza funzionale n^{esima} di trama $J(Q)$* :

$$(5,12) \quad S_{J(Q)}(\xi, r) = \sum_0^{\infty} \eta_{\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_n} \eta_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n} Q_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n} \xi^{-\sum_{i=1}^n (n+1)\bar{k}_i} r^{m_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n}}$$

nella quale si ha :

$$(5,13) \quad \eta_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n} = \frac{1}{\omega_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n}} \leq 1$$

essendo $\omega_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n}$ l'intero positivo sopra definito; inoltre nella (5,12) si ha $|\xi| = 1, |r| \leq \varrho_r < 1$ e gli interi positivi $m_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n}$ sono tali che, fissato u reale positivo < 1 , sia :

$$(5,14) \quad \left| r^{m_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n}} Q_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n} \right| < u^{\bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \dots + \bar{k}_n}$$

⁽¹⁾ Cfr. p. es. F. SEVERI — *Lezioni di analisi* — Ed. Zanichelli — Bologna, 1933. — vol. 1.º, pag. 5.

che risulta soddisfatta se è :

$$(5,15) \quad m_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n} > \frac{(\bar{k}_1 + \dots + \bar{k}_n) \log u - \log |Q_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n}|}{\log \varrho_r}$$

qualunque siano i parametri $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$; x rispettivamente nei suddetti domini D_1, D_2, \dots, D_s ; D_x .

In queste ipotesi la (5,12) è totalmente convergente per ξ variabile sulla circonferenza unitaria. La *funzione-stampo* $S_{J(Q)}$ come anche la *preparatrice n^{esima}* $M_{n,1}$ sono indipendenti dalla $f(x)$, ed anzi la *preparatrice* $M_{n,1}$ è indipendente anche dall'insieme $J(Q)$ (trama della potenza funzionale).

Se nel prodotto $S_{J(Q)}(\xi, r) \bar{f}_n^n(\xi, r)$ sostituiamo alle funzioni i rispettivi sviluppi in serie dati dalle (5,12) e (5,9) si trova :

$$(5,16) \quad S_{J(Q)}(\xi, r) \bar{f}_n^n(\xi, r) = \\ = \sum_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n} \sum_{k_1, \dots, k_n} \eta_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n} Q_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n} a_{k_1} \cdot a_{k_2} \dots a_{k_n} \xi^{V_{k_1, \dots, k_n} - V_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n}} r^{m_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n} + \sum_{s=1}^n k_s}$$

dove è $|r| \leq \bar{\varrho}$, se $\bar{\varrho}$, è il minore tra ϱ' , e ϱ_r , e dove si è posto :

$$(5,17) \quad V_{k_1, \dots, k_n} = \sum_{s=1}^n (n+1)^{k_s} \\ V_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n} = \sum_{s=1}^n (n+1)^{\bar{k}_s}$$

Come si è già visto al n. 3 il numero intero $(V_{k_1, \dots, k_n} - V_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n})$ è nullo soltanto se le due n^{uple} non ordinate (k_1, \dots, k_n) e $(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n)$ risultano formate con gli stessi termini; da qui discende che se moltiplichiamo il prodotto (5,16) per $1/2\pi i \xi$ ed integriamo il risultato termine a termine (come è possibile per la totale convergenza) lungo la circonferenza $C_\xi = (0,1)$, tutte le potenze della ξ , che compaiono nel prodotto (5,16), con esponente nullo verranno sostituite dall'unità, mentre tutte le altre saranno annullate; si otterrà così :

$$\begin{aligned}
(5,18) \quad & \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\xi} \frac{d\xi}{\xi} S_{J(Q)}(\xi, r) \bar{f}_n(\xi, r) = \\
& = \sum_0^{\infty} \eta_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n} Q_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n} (\omega_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n} a_{\bar{k}_1} a_{\bar{k}_2} \dots a_{\bar{k}_n}) r^{m_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n} + \sum_{s=1}^n \bar{k}_s}
\end{aligned}$$

infatti, fissata l'nupla *ordinata* $(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_n)$, le nuple ordinate (k_1, k_2, \dots, k_n) che risultano formate con i suoi stessi termini e che portano quindi allo annullamento dell'esponente $(V_{k_1, \dots, k_n} - V_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n})$, sono in tutto $\omega_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n}$, come si è già visto, quindi infine avremo :

$$\begin{aligned}
(5,19) \quad & \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\xi} \frac{d\xi}{\xi} S_{J(Q)}(\xi, r) \bar{f}_n(\xi, r) = \\
& = \sum_0^{\infty} a_{\bar{k}_1} a_{\bar{k}_2} \dots a_{\bar{k}_n} Q_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n} r^{m_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n} + \sum_{s=1}^n \bar{k}_s}
\end{aligned}$$

La somma della serie a secondo membro della (5,19) è ora nota per $|r| \leq \bar{\varrho}_r$ ma per $r = 1$ detta serie coincide con la serie (5,4), che per ipotesi è *assolutamente* convergente. La serie (5,19) è allora assolutamente convergente per $|r| \leq 1$ e si può quindi, per questi valori di r , ordinarla secondo le potenze crescenti di r , cioè essa equivale ad una serie di potenze della r convergente per $|r| \leq 1$.

Analogamente a quanto si è visto al n. 4, potremo *prolungare* i valori dati dalla (5,19) per $|r| \leq \bar{\varrho}_r$ ad $r = 1$, e otterremo allora :

$$\begin{aligned}
(5,20) \quad & [f^n(\dot{x})]_{(JQ)} = \sum_0^{\infty} a_{\bar{k}_1} a_{\bar{k}_2} \dots a_{\bar{k}_n} Q_{\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n} = \\
& = \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{\theta=1} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_r} dr \int_{C_\xi} \frac{d\xi}{\xi} P_0(r, \theta) S_{J(Q)}(\xi, r) \bar{f}_n(\xi, r)
\end{aligned}$$

dove C_r è la circonferenza $(0, \bar{\varrho}_r)$.

6. Potenza nesima funzionale generalizzata delle funzioni di più variabili. — I risultati del n. 5 possono subito estendersi al caso in cui la funzione f dipenda da più variabili, sia cioè :

$$(6,1) \quad f = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_0^{\infty} a_{k_1, k_2, \dots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$$

dove la serie (6,1) converga per $|x_s| \leq \rho_s$ con $s = 1, 2, \dots, m$. Sia dato poi un insieme $J(Q)$ di coefficienti :

$$(6,2) \quad Q = Q_{(k_{1,1}; k_{1,2}; \dots; k_{1,m}), (k_{2,1}; k_{2,2}; \dots; k_{2,m}), \dots, (k_{n,1}; k_{n,2}; \dots; k_{n,m}) \begin{pmatrix} k_{rs} = 0, 1, 2, 3, \dots \\ r = 1, 2, \dots, n \\ s = 1, 2, \dots, m \end{pmatrix}$$

eventualmente funzioni di più parametri $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ e delle stesse x_1, x_2, \dots, x_m .

Per semplicità di scrittura nel seguito porremo :

$$(6,3) \quad k(1,m), k(2,m), \dots, k(n,m)$$

rispettivamente al posto delle multiple ordinate :

$$(6,4) \quad (k_{1,1}; k_{1,2}; \dots; k_{1,m}), (k_{2,1}; k_{2,2}; \dots; k_{2,m}), \dots, (k_{n,1}; k_{n,2}; \dots; k_{n,m})$$

così p. es. la (6,2) diventerà la seguente :

$$(6,5) \quad Q = Q_{k(1,m), k(2,m), \dots, k(n,m)} \begin{pmatrix} k_{rs} = 0, 1, 2, 3, \dots \\ r = 1, 2, \dots, n \\ s = 1, 2, \dots, m \end{pmatrix}$$

Se converge *assolutamente* per $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s; x_1, x_2, \dots, x_m$ rispettivamente variabili in certi domini $D_1, D_2, \dots, D_s; D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_m}$, la serie seguente :

$$(6,6) \quad \sum_0^{\infty} a_{k(1,m); k(2,m); \dots; k(n,m)} a_{k(1,m)} a_{k(2,m)} \dots a_{k(n,m)} Q_{k(1,m); k(2,m); \dots; k(n,m)}$$

la sua somma verrà detta *potenza nésima funzionale di trama $J(Q)$* della f e si indicherà simbolicamente con l'espressione:

$$(6,7) \quad [f^n(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_m)]_{J(Q)}$$

Anche ora si richiede di calcolare la somma della (6,6) in «*termini finiti*» a partire dai valori della f , per x_1, x_2, \dots, x_m variabili rispettiva-

mente sulle curve chiuse C_1, C_2, \dots, C_m (di cui la generica C_s contiene l'origine $x_s = 0$ ed è tutta interna alla circonferenza $(0, \varrho_s)$), e da certe funzioni « *invariabili* » che ora definiremo.

In stretta analogia con quanto si è fatto al n. 5, prenderemo ora quale *preparatrice nesima di grado m*, la funzione :

$$(6,8) \quad M_{n,m}(x_1 r, x_2 r, \dots, x_m r; \xi) = \sum_0^{\infty} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_m} (x_1 r)^{k_1} (x_2 r)^{k_2} \dots (x_m r)^{k_m} \xi^{(n+1) \overline{k[m]}}$$

nella quale, come per la $M_{n,1}$, si ha $|\xi| = 1$ ed $|x_s r| < 1$ con $s = 1, 2, \dots, m$, inoltre gli esponenti $\overline{k[m]} = [k_1, k_2, \dots, k_m]$ sono i numeri interi definiti al n. 3 che come si è dimostrato sono in corrispondenza biunivoca con le muple ordinate (k_1, k_2, \dots, k_m) . La (6,8) nelle ipotesi fatte risulta assolutamente convergente.

E poi possibile eseguire il *prodotto funzionale simmetrico* :

$$(6,9) \quad \begin{aligned} & M_{n,m}(\overset{\circ}{x}_1 r, \overset{\circ}{x}_2 r, \dots, \overset{\circ}{x}_m r) f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_m) = \\ & = \sum_0^{\infty} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_m} a_{k_1, k_2, \dots, k_m} \xi^{(n+1) \overline{k[m]}} r^{\sum_{s=1}^m k_s} = \bar{f}_n(\xi, r) \end{aligned}$$

dove si è preso $|r| \leq \varrho_r < X$ se X è il minimo dei moduli dei punti delle curve C_1, C_2, \dots, C_m , lungo le quali si eseguono le integrazioni necessarie per il *prodotto simmetrico* (6,9). La funzione risultante $\bar{f}_n(\xi, r)$, anche ora, verrà detta la *preparata nesima* della f .

La potenza nesima (ordinaria) della \bar{f}_n avrà perciò lo sviluppo :

$$(6,10) \quad \bar{f}_n^n(\xi, r) = \sum_0^{\infty} \sum_{k(1,m); k(2,m); \dots; k(n,m)} a_{k(1,m)} a_{k(2,m)} \dots a_{k(n,m)} \xi^{\sum_{s=1}^n (n+1) \overline{k_s[m]}} r^{\sum_{s=1}^n \sum_{v=1}^m k_{s,v}}$$

nella quale, analogamente a quanto si è visto per la (5,9), il monomio $a_{k(1,m)} \cdot a_{k(2,m)} \dots a_{k(n,m)}$ può presentarsi un numero $\omega_{k(1,m); k(2,m); \dots; k(n,m)}$ di volte, pari al numero delle permutazioni con ripetizioni delle n muple ordinate $k(1,m); k(2,m); \dots; k(n,m)$. Anche ora il numero ω sarà del tipo :

$$(6,11) \quad \omega_{k(1,m); k(2,m); \dots; k(n,m)} = \frac{n!}{p_1! p_2! \dots p_q!}$$

con $p_1 + p_2 + \dots + p_q = n$.

Nel caso delle funzioni di m variabili, la *funzione-stampo per la potenza n -esima funzionale di trama* $J(Q)$ è la seguente :

$$(6,12) \quad S_{J(Q)}(\xi, r) = \sum_0^{\infty} \eta_{\bar{k}(1,m); \dots; \bar{k}(n,m)} Q_{\bar{k}(1,m); \dots; \bar{k}(n,m)} \xi^{\sum_{s=1}^n (n+1)^{\bar{k}_s} \bar{m}} r^{m_{\bar{k}(1,m); \dots; \bar{k}(n,m)}}$$

nella quale si ha :

$$(6,13) \quad \eta_{\bar{k}(1,m); \dots; \bar{k}(n,m)} = \frac{1}{\omega_{\bar{k}(1,m); \dots; \bar{k}(n,m)}}$$

inoltre $|\xi| = 1$, $|r| \leq \varrho_r < 1$ e gli esponenti interi positivi $m_{\bar{k}(1,m); \dots; \bar{k}(n,m)}$ sono tali che fissato u reale positivo qualunque < 1 , risulti :

$$(6,14) \quad m_{\bar{k}(1,m); \dots; \bar{k}(n,m)} > \frac{[(\bar{k}_{1,1} + \dots + \bar{k}_{1,m}) + \dots + (\bar{k}_{n,1} + \dots + \bar{k}_{n,m})] \log u - \log |Q_{\bar{k}(1,m); \dots; \bar{k}(n,m)}|}{\log \varrho_r}$$

per $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s; x_1, x_2, \dots, x_m$ comunque variabili rispettivamente in $D_1, D_2, \dots, D_s; D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_m}$. In queste ipotesi, come facilmente si verifica (cfr. n. 5), la (6,12) è totalmente convergente per $|\xi| = 1$.

Eseguiamo ora il prodotto $S_{J(Q)}(\xi, r) \bar{f}_n^n(\xi, r)$; sostituendo alle funzioni i rispettivi sviluppi in serie troviamo (cfr. le (6,12) e (6,10)) :

$$(6,15) \quad S_{J(Q)}(\xi, r) \bar{f}_n^n(\xi, r) = \sum_0^{\infty} \sum_{\bar{k}(1,m); \dots; \bar{k}(n,m)} r^{\sum_{s=1}^n \sum_{v=1}^m \bar{k}_{s,v}} \cdot \eta_{\bar{k}(1,m); \dots; \bar{k}(n,m)} Q_{\bar{k}(1,m); \dots; \bar{k}(n,m)} a_{\bar{k}(1,m)} \dots a_{\bar{k}(n,m)} \xi^{V_{\bar{k}(1,m); \dots; \bar{k}(n,m)} - V_{\bar{k}(1,m); \dots; \bar{k}(n,m)}} r^{V_{\bar{k}(1,m); \dots; \bar{k}(n,m)}}$$

Dove si è preso $|r| \leq \bar{\varrho}_r$ essendo $\bar{\varrho}_r$ il minore tra ϱ'_r e ϱ_r e dove si è posto :

$$(6,16) \quad V_{\bar{k}(1,m); \dots; \bar{k}(n,m)} = \sum_{s=1}^n (n+1)^{\bar{k}_s \bar{m}}$$

$$V_{\bar{k}(1,m); \dots; \bar{k}(n,m)}^- = \sum_{s=1}^n (n+1)^{\bar{k}_s \bar{m}}$$

e quindi analogamente a quanto si è detto al n. 5, si vede che gli interi :

$$V_{k(1,m); \dots; \bar{k}(n,m)} - V_{\bar{k}(1,m); \dots; \bar{k}(n,m)}$$

sono nulli soltanto quando le due nuple *non* ordinate $k(1,m), k(2,m), \dots, \bar{k}(n,m)$ e $\bar{k}(1,m), \bar{k}(2,m), \dots, \bar{k}(n,m)$ risultano formate con gli stessi elementi. Da qui discende che moltiplicando il prodotto (6,15) per $1/2\pi i \xi$ ed integrando il risultato lungo la circonferenza $C_{\xi} = (0,1)$ si ottiene:

$$(6,17) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\xi}} \frac{d\xi}{\xi} S_{J(Q)}(\xi, r) \bar{f}_n^n(\xi, r) = \\ = \sum_0^{\infty} \eta_{\bar{k}(1,m); \dots; \bar{k}(n,m)} Q_{\bar{k}(1,m); \dots; \bar{k}(n,m)} (\omega_{\bar{k}(1,m); \dots; \bar{k}(n,m)} \alpha_{\bar{k}(1,m)} \dots \alpha_{\bar{k}(n,m)}) r^{\sum_{s=1}^n \sum_{v=1}^m k_{s,v} + m \bar{k}(1,m); \dots; \bar{k}(n,m)}$$

anche ora dato che $\eta_{\bar{k}(1,m); \dots; \bar{k}(n,m)} \cdot \omega_{\bar{k}(1,m); \dots; \bar{k}(n,m)} = 1$, la serie a secondo membro della (6,17) per $r=1$ coincide con la serie (6,6), che per ipotesi è assolutamente convergente. Seguendo allora un ragionamento identico a quello seguito per la (5,19), otteniamo infine:

$$(6,18) \quad [f^n(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x})]_{J(Q)} = \sum_0^{\infty} a_{k(1,m), k(2,m), \dots, k(n,m)} Q_{k(1,m), k(2,m), \dots, k(n,m)} = \\ = \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{\theta=1} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_r} dr \int_{C_{\xi}} \frac{d\xi}{\xi} P_{\theta}(r, \theta) S_{J(Q)}(\xi, r) \bar{f}_n^n(\xi, r)$$

Nel capitolo seguente faremo delle importanti applicazioni dei risultati ottenuti.

CAPITOLO II

CALCOLO DELLA POTENZA NESIMA DI COMPOSIZIONE SIMMETRICA CON L'IMPIEGO DELLE FUNZIONI-STAMPO. ESTENSIONE DEI RISULTATI AL CALCOLO DEL NUCLEO RISOLVENTE DI UNA ESTESA CLASSE DI EQUAZIONI FUNZIONALI LINEARI

7. La potenza nesima di composizione simmetrica quale particolare potenza nesima funzionale generalizzata. — Data la funzione $w(x, \alpha)$ regolare per $x = \alpha = 0$ e il cui sviluppo:

$$(7,1) \quad w(x, \alpha) = \sum_0^{\infty} s_{k,h} x^k \alpha^h$$

converga per $|x| < \varrho_1$ ed $|\alpha| < \varrho_2$ con $\varrho_1 \varrho_2 > 1$, è sempre possibile eseguire il prodotto funzionale simmetrico seguente :

$$(7,2) \quad w(x, \dot{\alpha}_1) w(\dot{\alpha}_1, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\alpha_1} w(x, \frac{1}{\alpha_1}) w(\alpha_1, \alpha) d\alpha_1$$

dove per la curva *separatrice* C si può prendere p. es. la circonferenza (O, R) con $\frac{1}{\varrho_2} < R < \varrho_1$. Sostituendo alla w il suo sviluppo (7,1), dalla (7,2) si ricava :

$$(7,3) \quad w(x, \dot{\alpha}_1) w(\dot{\alpha}_1, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\alpha_1}{\alpha_1} \left(\sum_0^{\infty} s_{k_2, h_2} \frac{x^{k_2}}{\alpha_1^{h_2}} \right) \left(\sum_0^{\infty} s_{k_1, h_1} \alpha_1^{k_1} \alpha^{h_1} \right) = \\ = \sum_0^{\infty} s_{k_2, h_2} \cdot s_{h_2, h_1} x^{k_2} \alpha^{h_1}$$

Il « prodotto » (7,2) è detto *potenza seconda di composizione simmetrica della $w(x, \alpha)$* ⁽¹⁾, che si indica anche più brevemente nella forma :

$$(7,4) \quad \dot{w}^2(x, \alpha) = w(x, \dot{\alpha}_1) w(\dot{\alpha}_1, \alpha)$$

Dato che lo sviluppo (7,3) della $\dot{w}^2(x, \alpha)$ converge per $|x| < \varrho_1$ ed $|\alpha| < \varrho_2$, è possibile eseguire il prodotto funzionale simmetrico :

$$(7,5) \quad w(x, \dot{\alpha}_2) \dot{w}^2(\dot{\alpha}_2, \alpha) = w(x, \dot{\alpha}_2) w(\dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_1) w(\dot{\alpha}_1, \alpha) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\alpha_2} w(x, \frac{1}{\alpha_2}) \dot{w}^2(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2$$

dove la curva *separatrice* C è la stessa della (7,2). Anche ora sostituendo alle funzioni della (7,5) i rispettivi sviluppi in serie, troviamo :

$$(7,6) \quad w(x, \dot{\alpha}_2) w(\dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_1) w(\dot{\alpha}_1, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\alpha_2} \left(\sum_0^{\infty} s_{k_3, h_3} \frac{x^{k_3}}{\alpha_2^{h_3}} \right) \left(\sum_0^{\infty} s_{k_2, h_2} \cdot s_{h_2, h_1} \alpha_2^{k_2} \alpha^{h_1} \right) d\alpha_2 = \\ = \sum_0^{\infty} s_{k_3, h_3} s_{h_3, h_2} s_{h_2, h_1} x^{k_3} \alpha^{h_1}$$

(1) Cfr. F. A. n. 67 pag. 115.

Il « prodotto » (7,6) è detto *potenza terza di composizione simmetrica della w* e si indica anche più succintamente così :

$$(7,7) \quad \overset{\circ}{w}^3(x, \alpha) = w(x, \overset{\circ}{\alpha}_2) w(\overset{\circ}{\alpha}_2, \overset{\circ}{\alpha}_1) w(\overset{\circ}{\alpha}_1, \alpha)$$

E allora immediato trovare in generale :

$$(7,8) \quad \begin{aligned} \overset{\circ}{w}^n(x, \alpha) &= w(x, \overset{\circ}{\alpha}_{n-1}) w(\overset{\circ}{\alpha}_{n-1}, \overset{\circ}{\alpha}_{n-2}) \dots w(\overset{\circ}{\alpha}_1, \alpha) = \\ &= \sum_0^{\infty} s_{k_n, h_n; k_{n-1}, h_{n-1}, \dots, k_1} s_{k_n, h_n} s_{k_{n-1}, h_{n-1}} \dots s_{k_1, h_1} x^{k_n} \alpha^{h_1} \end{aligned}$$

che si chiama *potenza n-esima di composizione simmetrica della w*.

Le potenze di composizione simmetrica per gli esponenti $n = 1$ ed $n = 0$ si definiscono come segue :

$$(7,9) \quad \begin{aligned} \overset{\circ}{w}^1(x, \alpha) &= w(x, \alpha) \\ \overset{\circ}{w}^0(x, \alpha) &= \frac{1}{1 - x\alpha} \end{aligned}$$

dove la seconda evidentemente non dipende dalla w , essendo essa infatti l'indicatrice simmetrica del funzionale « identità ».

Osservando lo sviluppo (7,8) della *potenza n-esima di composizione simmetrica*, si vede che questa può interpretarsi come la particolare *potenza n-esima funzionale generalizzata di trama J(θ)*, dove J è l'insieme dei coefficienti $\theta_{k_n, h_n; \dots; k_1, h_1}$ così definiti :

$$(7,10) \quad \theta_{k_n, h_n; k_{n-1}, h_{n-1}; \dots; k_1, h_1}(x, \alpha) = \begin{cases} x^{k_n} \alpha^{h_1} & \text{per } k_s = h_{s+1} \\ & (s = 1, 2, 3, \dots, n-1) \\ 0 & \text{per in ogni altro caso} \end{cases}$$

infatti possiamo allora scrivere :

$$(7,11) \quad \overset{\circ}{w}^n(x, \alpha) = \sum_0^{\infty} s_{k_n, h_n; k_{n-1}, h_{n-1}; \dots; k_1, h_1} s_{k_n, h_n} s_{k_{n-1}, h_{n-1}} \dots s_{k_1, h_1} \theta_{k_n, h_n; k_{n-1}, h_{n-1}; \dots; k_1, h_1}(x, \alpha)$$

serie assolutamente convergente per $|x| < \varrho_1$ ed $|x| < \varrho_2$.

Prenderemo quindi la *preparatrice n-esima di secondo grado* ⁽¹⁾ come si ricava dalla espressione generale (6,8) :

$$(7,12) \quad M_{n,2}(xr, \alpha r, \xi) = \sum_0^{\infty} \sum_{k,h} (xr)^k (\alpha r)^h \xi^{(n+1)[k,h]}$$

e calcoliamo la *preparata n-esima* della w :

$$(7,13) \quad \begin{aligned} \bar{w}_n(\xi, r) &= M_{n,2}(\dot{x}r, \dot{\alpha}r, \xi) w(\dot{x}, \dot{\alpha}) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_x} \frac{dx}{x} \int_{C_\alpha} \frac{d\alpha}{\alpha} M_{n,2}\left(\frac{r}{x}, \frac{r}{\alpha}, \xi\right) w(x, \alpha) = \\ &= \sum_0^{\infty} \sum_{k,h} s_{k,h} r^{k+h} \xi^{(n+1)[k,h]} \end{aligned}$$

dove C_x è la circonferenza $(0, R)$ con $\frac{1}{\varrho_2} < R < \varrho_1$ e C_α è quella $\left(0, \frac{1}{R}\right)$ mentre r è preso in modo che $|r| \leq \varrho_r < R_0$ essendo R_0 il minore tra R e $\frac{1}{R}$ ($R_0 \leq 1$).

Definiamo poi con la seguente serie la *funzione-stampo per la potenza n-esima funzionale di trama* $J(\theta)$ ovvero la *funzione-stampo per la potenza n-esima di composizione simmetrica* (cfr. la (6,12)) :

$$(7,14) \quad \begin{aligned} S_n(x, \alpha, \xi, r) &= \sum_0^{\infty} \eta_{k_n, h_n; \dots; k_1, h_1} \theta_{k_n, h_n; \dots; k_1, h_1} \xi^{-\sum_{s=1}^n (n+1)[k_s, h_s]} r^{m_{k_n, h_n; \dots; k_1, h_1}} = \\ &= \sum_0^{\infty} \eta_{k_n, h_n, \dots, h_1} x^{k_n} \alpha^{h_1} \xi^{-(n+1)[k_n, h_n] - \sum_{s=1}^{n-1} (n+1)[k_s+1, h_s]} r^{m_{k_n, h_n, \dots, h_1}} \end{aligned}$$

la quale, se poniamo

$$m_{k_n, h_n, \dots, h_1} = k_n + \sum_{s=1}^n h_s$$

⁽¹⁾ Infatti la w è funzione di due variabili (cfr. nn. 5 e 6).

diventa

(7,15)

$$S_n(x, \alpha, \xi, r) = \sum_0^{\infty} \eta_{k_n, h_n, \dots, h_1} x^{k_n} \alpha^{h_1} \xi^{-(n+1) \sum_{s=1}^{n-1} [k_n, h_n] - \sum_{s=1}^{n-1} [h_{s+1}, h_s]} r^{k_n + \sum_{s=1}^n h_s}$$

che per $|x| < R$, $|\alpha| < 1/R$ ed $|r| < \varrho_r$, risulta totalmente convergente per $|\xi| = 1$, infatti per detti valori essa è maggiorata dalla serie :

$$(7,16) \quad \sum_0^{\infty} R^{k_n} \frac{1}{R^{h_1}} \varrho_r^{k_n + \sum_{s=1}^n h_s} = \frac{R}{(1 - R\varrho_r)(R - \varrho_r)(1 - \varrho_r)^{n-1}}$$

Possiamo allora applicare immediatamente i risultati del n. 6 ottenendo (cfr. la (6,17)).

$$(7,17) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\xi} \frac{d\xi}{\xi} S_n(x, \alpha, \xi, r) \bar{w}_n^n(\xi, r) = \\ = \sum_0^{\infty} s_{k_n, h_n} s_{h_n, h_{n-1}} \dots s_{h_2, h_1} x^{k_n} \alpha^{h_1} r^{2(k_n + h_1) + 3 \sum_{s=2}^n h_s}$$

dove è $|r| < \varrho_r$.

Infine la espressione esplicita della *potenza nesima di composizione simmetrica* della w si ottiene con la formula :

$$(7,18) \quad \dot{w}^n(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{\theta=1} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_r} dr \int_{C_\xi} \frac{d\xi}{\xi} P_o(r, \theta) S_n(x, \alpha, \xi, r) \bar{w}_n^n(\xi, r)$$

dove C_r è la circonferenza $(0, \varrho_r)$.

Possiamo così affermare che :

La potenza nesima di composizione simmetrica della generica funzione $w(x, \alpha)$ si può ottenere applicando alla potenza nesima (ordinaria) della preparata nesima della w , un funzionale lineare misto indipendente dalla w .

Le funzioni *fisse* (cioè indipendenti dalla w), M_n , P_o ed S_n saranno calcolate *una volta per sempre*, suppostole quindi note si vede che il calcolo della $\dot{w}^n(x, \alpha)$ si ottiene mediante le seguenti operazioni :

a) due integrazioni definite (calcoli di residuo) per ottenere la preparata \bar{w}_n .

- b) elevazione alla potenza n^{esima} della preparata \bar{w}_n .
 c) moltiplicazione della \bar{w}_n per $\frac{1}{\xi} P_o \cdot S_n$
 d) calcolo del residuo del prodotto ottenuto, nei punti $r = 0$ e $\xi = 0$
 e) derivazione del risultato precedente, rispetto alla θ (lungo l'asse reale nell'intorno sinistro di $\theta = 1$) per $\theta = 1$.

Si vede così che con l'impiego delle funzioni-stampo il numero delle operazioni necessarie per il calcolo della $\overset{\circ}{w}^n(x, \alpha)$ è indipendente da n , mentre calcolando la $\overset{\circ}{w}^n(x, \alpha)$ con n successivi prodotti funzionali simmetrici, come indica la sua espressione (7,8), occorrerebbero $(n - 1)$ integrazioni (calcoli di residuo). Si osservi poi che dalla (7,15) si ricava in particolare per $n = 1$:

$$(7,19) \quad S_1(x, \alpha, \xi, r) = \sum_{0, k, h}^{\infty} \eta_{k, h} x^k \alpha^h \xi^{-2} r^{k+h}$$

ottenuta poi dalla (7,13) la preparata 1.^a $\bar{w}_1(\xi, r)$ della $w(x, \alpha)$, dalla (7,18) si ricava (cfr. la prima delle (7,9)):

$$(7,20) \quad \overset{\circ}{w}^1(x, \alpha) = w(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \theta_{\theta=1}} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_r} dr \int_{C_\xi} \frac{d\xi}{\xi} P_o(r, \theta) S_1(x, \alpha, \xi, r) \bar{w}_1(\xi, r)$$

8. Calcolo mediante integrali definiti del nucleo risolvete di una certa classe di equazioni funzionali lineari (nel campo analitico).

a) **Premesse.** Sia data l'equazione funzionale lineare più generale nel campo complesso ⁽¹⁾:

$$(8,1) \quad \bar{F}[y(t); x] = f(x)$$

nella quale \bar{F} è un funzionale analitico lineare definito in una certa regione funzionale e le funzioni $f(x)$ e $y(x)$ sono rispettivamente il termine noto e l'incognita.

L'equazione (8,1) può sempre scriversi nella forma:

$$(8,2) \quad y(x) - (y(x) - \bar{F}[y(t); x]) = f(x)$$

perciò se poniamo:

$$(8,3) \quad y(x) - \bar{F}[y(t); x] = F[y(t); x]$$

⁽¹⁾ Cfr. E. F. L.

la (8,2) diventa :

$$(8,4) \quad y(x) - F[(y(t); x)] = f(x)$$

Se poi $w(x, \alpha)$ è l'*indicatrice simmetrica* del funzionale analitico lineare misto F definito dalla (8,3), si ha :

$$(8,5) \quad F[y(t); x] = w(x, \alpha) y(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\alpha} w\left(x, \frac{1}{\alpha}\right) y(\alpha) d\alpha$$

dove C è una curva chiusa *separatrice* delle funzioni $\frac{1}{\alpha} w\left(x, \frac{1}{\alpha}\right)$ e $y(\alpha)$.

La (8,4) può quindi scriversi nell'altra forma :

$$(8,6) \quad y(x) - w(x, \alpha) y(\alpha) = f(x)$$

ovvero

$$(8,7) \quad y(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\alpha} w\left(x, \frac{1}{\alpha}\right) y(\alpha) d\alpha = f(x)$$

L'equazione (8,6) coincide, per $\lambda = 1$, con l'equazione

$$(8,8) \quad \gamma(x, \lambda) - \lambda w(x, \alpha) \gamma(\alpha, \lambda) = f(x)$$

che rappresenta l'equazione (8,1) in forma *canonica*. Ogni equazione (8,1) può mettersi in modo *unico* nella forma (8,8).

La funzione $w(x, \alpha)$ si dice *nucleo* dell'equazione (8,8).

Se poi la serie :

$$(8,9) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \overset{\circ}{w}^k(x, \alpha)$$

converge in un intorno di $\lambda = 0$, la sua somma $\Gamma(\lambda; x, \alpha)$ si dice *nucleo associato* della $w(x, \alpha)$, mentre la funzione :

$$(8,10) \quad \mathfrak{R}(\lambda; x, \alpha) = \frac{1}{\lambda} \Gamma(\lambda; x, \alpha) - \frac{1}{\lambda(1-x\alpha)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \overset{\circ}{w}^n(x, \alpha)$$

è detta *nucleo risolvente* dell'equazione (8,8).

Per quei valori di λ non singolari per il *nucleo risolvete* (o per il nucleo associato) e per quelle funzioni $f(\alpha)$ che non hanno punti singolari reciproci di quelli che, per x generico, possiede il *nucleo risolvete* considerato come funzione di α , la funzione

$$(8,11) \quad \gamma(x, \lambda) = f(x) + \lambda \mathfrak{R}(\lambda; x, \overset{\circ}{\alpha}) f(\overset{\circ}{\alpha}) = \Gamma(\lambda; x, \overset{\circ}{\alpha}) f(\overset{\circ}{\alpha})$$

è soluzione della (8,8); se il *nucleo risolvete* \mathfrak{R} o la $f(x)$ sono polidrome, il prodotto simmetrico nella (8,11) è a più valori e la (8,11) ci dà perciò più soluzioni della (8,8).

In questo numero considereremo soltanto quelle equazioni (8,1) per le quali il corrispondente funzionale analitico lineare misto F abbia quale *indicatrice simmetrica* $w(x, \alpha)$ una funzione regolare per $x = \alpha = 0$ e di cui lo sviluppo in serie doppia di potenze:

$$(8,12) \quad w(x, \alpha) = \sum_{k, h}^{\infty} s_{k, h} x^k \alpha^h$$

converge per $|x| < \varrho_1$ ed $|\alpha| < \varrho_2$ con $\varrho_1 \cdot \varrho_2 > 1$.

In queste ipotesi la *potenza nesima di composizione simmetrica* della w è data dall'espressione (cfr. n. 7):

$$(8,13) \quad \begin{aligned} & \overset{\circ}{w}^n(x, \alpha) = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_C \frac{1}{\alpha^{n-1}} w\left(x, \frac{1}{\alpha_{n-1}}\right) d\alpha_{n-1} \int_C \frac{1}{\alpha_{n-2}} w\left(\alpha_{n-1}, \frac{1}{\alpha_{n-2}}\right) d\alpha_{n-2} \dots \int_C \frac{d\alpha_1}{\alpha_1} w\left(\alpha_2, \frac{1}{\alpha_1}\right) w(\alpha_1, \alpha) \end{aligned}$$

dove C può sempre essere una circonferenza (O, R) con $\frac{1}{\varrho_2} < R < \varrho_1$, perciò se W è il massimo di $|w(x, \alpha)|$ per $|x| \leq R$ ed $|\alpha| \leq \frac{1}{R}$ ($< \varrho_2$) nello stesso campo di variabilità per la x e per la α , si ha dalla (8,13):

$$(8,14) \quad |\overset{\circ}{w}^n(x, \alpha)| \leq W^n$$

da cui ne viene che la serie (8,9), sviluppo del *nucleo associato*, nonché la serie a terzo membro della (8,10), sviluppo del *nucleo risolvete*, convergono *assolutamente* per

$$(8,15) \quad |\lambda| < \frac{1}{W}$$

quando x ed α variano nel campo :

$$(8,16) \quad |x| < R \quad |\alpha| < \frac{1}{R}$$

Pertanto il *nucleo associato* della w e il *nucleo risolvente* della (8,8) per la particolare classe di funzionali F' ora considerata, per $|\lambda| < \frac{1}{W}$, risultano funzioni analitiche e regolari delle variabili x ed α in tutto il campo di variabilità (8,16).

Nella (8,8) si potrà quindi prendere quale $f(x)$, una qualunque funzione analitica della regione funzionale (A), dove A è l'insieme chiuso definito dalla relazione :

$$(8,17) \quad |x| \leq R$$

Corrispondentemente la (8,11) ci dà una soluzione della (8,8) che anzi per i valori di λ soddisfacenti alla (8,15) è *unica*.

Si osservi poi che anche la serie :

$$(8,18) \quad w_p(x, \alpha) = \sum_{k,h}^{\infty} |s_{k,h}| x^k \alpha^h$$

converge per $|x| < \varrho_1$ ed $|\alpha| < \varrho_2$ e se quindi indichiamo con W_p il massimo di $|w_p(x, \alpha)|$ per x ed α variabili nel campo (8,16), si trova analogamente alla w :

$$(8,19) \quad |\dot{w}_p^n(x, \alpha)| \leq W_p^n$$

conseguentemente la serie

$$(8,20) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \dot{w}_p^n(x, \alpha)$$

convergerà assolutamente per

$$(8,21) \quad |\lambda| < \frac{1}{W_p}$$

quando x ed α variano comunque nel campo (8,16). La funzione $w_p(x, \alpha)$ verrà detta la *parallela* della $w(x, \alpha)$. Si osservi che $W_p \geq W$.

b) **La preparatrice generale.** — Premesse queste considerazioni notiamo subito che per ottenere il *nucleo associato* (8,9) ovvero il *nucleo risolvete* (8,10) è necessario calcolare le *potenze nesime di composizione simmetrica* della w di esponente n qualunque e quindi con il metodo di calcolo basato sull'impiego delle funzioni-stampo sarebbe necessario introdurre infinite funzioni *preparatrici* e calcolare quindi infinite *preparate* della w (cfr. nn. 6 e 7).

Questa apparente difficoltà viene facilmente superata introducendo una nuova funzione «*invariabile*» che però si sostituisce alle precedenti e che chiameremo *preparatrice generale* ⁽¹⁾, la sua espressione esplicita è la seguente :

$$(8,22) \quad M(xr, \alpha r, \xi, t) = \sum_{s=1}^{\infty} t^{\sigma_s} r^s M_{s,2}(xr, \alpha r, \xi)$$

dove la funzione $M_{s,2}$ è la *preparatrice s'esima di 2.º grado* definita dalla (7,12) e nella quale è quindi $|r| \leq \varrho_r (< 1)$ ⁽²⁾ e la t è un parametro ausiliario che si mantiene in modulo uguale all'unità mentre gli esponenti σ_s sono interi positivi il cui valore sarà ora precisato.

Dalla (7,12) si ricava intanto :

$$(8,23) \quad |M_{s,2}(xr, \alpha r, \xi)| \leq \sum_{0}^{\infty} |x|^k |\alpha|^h \varrho_r^{k+h} = \frac{1}{(1 - |x|\varrho_r)(1 - |\alpha|\varrho_r)} \leq \\ \leq \frac{R}{(1 - R\varrho_r)(R - \varrho_r)} \quad (s = 1, 2, 3, \dots)$$

valida per $|x| \leq R$ ed $|\alpha| \leq 1/R$; quindi per $|r| \leq \varrho_r$ la (8,22) come serie di funzioni di x e di α risulta *totalmente convergente* per $|x| \leq R$ ed $|\alpha| \leq \frac{1}{R}$ perchè maggiorata dalla serie :

$$(8,24) \quad \frac{R}{(1 - R\varrho_r)(R - \varrho_r)} \sum_{s=1}^{\infty} \varrho_r^s = \frac{R\varrho_r}{(1 - R\varrho_r)(R - \varrho_r)(1 - \varrho_r)}$$

Gli esponenti interi positivi σ_s sono definiti dalla relazione :

$$(8,25) \quad \sigma_s > (s - 1) \sigma_{s-1} \quad (s = 2, 3, \dots)$$

⁽¹⁾ Per essere esatti dovremmo chiamarla: preparatrice generale di 2.º grado.

⁽²⁾ Infatti al n. 7 abbiamo preso $\varrho_r < R_0$, dove R_0 è il minore tra R e $1/R$.

che è certo soddisfatta se $\sigma_s = s \sigma_{s-1}$ potremo così prendere, tanto per fissare le idee, $\sigma_1 = 1$ e quindi :

$$(8,26) \quad \sigma_s = s!$$

Calcoliamo ora la funzione che chiameremo *preparata generale della w*, con il seguente prodotto funzionale simmetrico :

$$(8,27) \quad \begin{aligned} \bar{w}(\xi, r, t) &= M(\overset{\circ}{x}r, \overset{\circ}{\alpha}r, \overset{\circ}{\xi}, t) w(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{\alpha}) = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_x} \frac{dx}{x} \int_{C_\alpha} \frac{d\alpha}{\alpha} M\left(\frac{r}{x}, \frac{r}{\alpha}, \xi, t\right) w(x, \alpha) = \sum_{s=1}^{\infty} t^{s!} r^s \bar{w}_s(\xi, r) \end{aligned}$$

dove la $\bar{w}_s(\xi, r)$ è la preparata s'esima della w data dalla (7,13) (per $s = n$) e dove l'integrazione lungo la circonferenza $C_x = (0, R)$ e alla $C_\alpha = (0, 1/R)$ viene fatta termine a termine nello sviluppo della M dato che, come si è detto, risulta *totalmente* convergente nel campo (8,16). Dalla (8,27) si ricava (*) (nel campo (8,16) risulta $|w(x, \alpha)| \leq W$) :

$$(8,28) \quad |\bar{w}(\xi, r, t)| \leq \frac{R \varrho, W}{(1 - R \varrho, r) (R - \varrho, r) (1 - \varrho, r)}$$

Scriviamo poi la potenza nesima (ordinaria) della \bar{w} :

$$(8,29) \quad \bar{w}^n(\xi, r, t) = \sum_{s_1, s_2, \dots, s_n}^{\infty} t^{s_1! + s_2! + \dots + s_n!} r^{s_1 + s_2 + \dots + s_n} \bar{w}_{s_1} \bar{w}_{s_2} \dots \bar{w}_{s_n}$$

Dimostriamo ora che nella (8,29) risulta :

$$(8,30) \quad s_1! + s_2! + \dots + s_n! = n \cdot n!$$

soltanto quando è $s_1! = s_2! = \dots = s_n! = n!$ (cioè $s_1 = s_2 = \dots = s_n = n$).

(*) Infatti per $|x| \geq R$ ed $|\alpha| \geq \frac{1}{R}$ si ha :

$$\left| M\left(\frac{r}{x}, \frac{r}{\alpha}, \xi, t\right) \right| \leq \frac{R \varrho, r}{(R - \varrho, r) (1 - \varrho, r) (1 - \varrho, r)}$$

Infatti se anche uno solo dei termini della somma $s_1! + s_2! + \dots + s_n!$ risulta maggiore di $n!$, indicato detto termine con $(n+p)!$ è chiaro che

$$(8,31) \quad (n+p)! > n \cdot n!$$

e quindi a maggior ragione sarà $s_1! + s_2! + \dots + s_n! > n \cdot n!$. Se quindi nessuno dei termine di detta somma può essere maggiore di $n!$ così anche nessuno può essergli inferiore. Si conclude che la (8,30) è soddisfatta soltanto per $s_1! = s_2! = \dots = s_n! = n!$ cioè per $s_1 = s_2 = \dots = s_n = n$.

Poichè allora nello sviluppo (8,30) la potenza della t , $t^{n!}$, si presenta come abbiamo dimostrato una *volta sola* e dato che essa inoltre risulta a coefficiente della \bar{w}_n^n , se moltiplichiamo la funzione \bar{w}^n data dalla (8,29) per $1,2\pi i t^{n!+1}$ ed integriamo il risultato rispetto alla t lungo la circonferenza $C_t = (0,1)$ termine a termine, come è permesso, la potenza $t^{n!}$ dello sviluppo (8,29) darà per risultato l'unità, mentre *tutte le altre potenze della t* , che figurano nella (8,29), *verranno annullate*, ottenendosi :

$$(8,32) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C_t} \frac{dt}{t^{n!+1}} \bar{w}^n(\xi, r, t) = r^n \bar{w}_n^n(\xi, r)$$

Si vede così che calcolata *una volta per sempre* la funzione *preparatrice generale*, si può ottenere la \bar{w}_n^n dalla \bar{w}^n per n qualunque, con un numero di operazioni *finito ed indipendente da n* .

Consideriamo poi la serie di potenze della *preparata generale* \bar{w} :

$$(8,33) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (u\lambda)^n \bar{w}^n(\xi, r, t)$$

nella quale se prendiamo $|\lambda| < 1/W_p$, per la (8,28) e ricordando che $W_p \geq W$ si avrà :

$$(8,34) \quad |u\lambda (\bar{w}\xi, r, t)| < 1$$

quando

$$(8,35) \quad |u| < \frac{(1 - R\rho_r)(R - \rho_r)(1 - \rho_r)}{R\rho_r}$$

in seguito prenderemo :

$$(8,36) \quad |u| \leq \varrho_u < \frac{(1 - R\varrho_r)(R - \varrho_r)(1 - \varrho_r)}{R\varrho_r}$$

In queste ipotesi potremo scrivere :

$$(8,37) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (u\lambda)^n \bar{w}^n(\xi, r, t) = \frac{1}{1 - u\lambda \bar{w}(\xi, r, t)}$$

c) **La funzione-stampo generale di composizione simmetrica.** Calcolo del nucleo risolvete. — Introduciamo la funzione «fissa» che chiameremo *funzione-stampo generale di composizione simmetrica* :

$$(8,38) \quad S(x, \alpha, \xi, r, t, u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n!}}{t^{nn!+1} u^{n+1}} S_n(x, \alpha, \xi, r)$$

dove la S_n è la *funzione-stampo per la potenza n-esima di composizione simmetrica* data per la (7,15) per la quale, tenendo conto della (7,16) si ottiene:

$$(8,39) \quad |S_n(x, \alpha, \xi, r)| \leq \frac{R}{(1 - R\varrho_r)(R - \varrho_r)(1 - \varrho_r)^{n-1}}$$

e se nella (8,39) è $|t| = 1$ ed $|u| \geq \varrho_u$ dove ϱ_u è definito dalla (8,36) ed $|r| \leq \varrho_r$, si avrà :

$$(8,40) \quad \frac{|r|^{n!}}{|t|^{nn!+1} u^{n+1}} |S_n(x, \alpha, \xi, r)| \leq \frac{R\varrho_r^{n!}}{(1 - R\varrho_r)(R - \varrho_r)\varrho_u} \left(\frac{1}{\varrho_u(1 - \varrho_r)} \right)^{n-1}$$

ma da un certo n in poi si ha :

$$(8,41) \quad \varrho_r^{n!} < \frac{1}{n!}$$

dato che da un certo n in poi

$$(8,42) \quad \frac{\log n!}{n!} < \log \left(\frac{1}{\varrho_r} \right) \quad (\varrho_r < 1)$$

infatti : $\lim (\log k!)/k! = 0$ per $k \rightarrow \infty$.

La serie (8,38) risulta perciò *totalmente* convergente per

$$(8,43) \quad |x| \leq R; \quad |\alpha| \leq \frac{1}{R}; \quad |r| \leq \varrho_r; \quad |t| = 1; \quad |u| \geq \varrho_u$$

Il *prodotto funzionale emisimmetrico* della funzione-stampo \mathbf{S} per la funzione (8,37) rispetto alla variabile u , ci darà :

$$(8,44) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C_u} \frac{\mathbf{S}(x, \alpha, \xi, r, t, u)}{1 - u\lambda \bar{w}(\xi, r, t)} du = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n!}}{t^{n \cdot n! + 1}} \lambda^n S_n(x, \alpha, \xi, r) \bar{w}^n(\xi, r, t)$$

dove C_u è la circonferenza $(0, \varrho_u)$.

Per la totale convergenza possiamo poi integrare la (8,44) rispetto alla variabile t lungo la circonferenza C_t termine a termine, ottenendosi, per la (8,32) :

$$(8,45) \quad \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_t} dt \int_{C_u} du \frac{\mathbf{S}(x, \alpha, \xi, r, t, u)}{1 - u\lambda \bar{w}(\xi, r, t)} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n! + n^2} \lambda^n S_n(x, \alpha, \xi, r) \bar{w}_n^n(\xi, r)$$

Moltiplicando infine il risultato per $1/2\pi i \xi$ e integrando rispetto alla ξ lungo la C_ξ , avremo, per la (7,17) :

$$(8,46) \quad \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{C_\xi} \frac{d\xi}{\xi} \int_{C_t} dt \int_{C_u} du \frac{\mathbf{S}(x, \alpha, \xi, r, t, u)}{1 - u\lambda \bar{w}(\xi, r, t)} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n! + n^2} \lambda^n \left(\sum_{\mathbf{0}}^{\infty} S_{k_n, h_n, h_{n-1}, \dots, h_1} S_{h_n, h_n} \cdot S_{h_n, h_{n-1}} \dots S_{h_2, h_1} x^{k_n} \alpha^{h_1} r^{2(k_n + h_1) + 3 \sum_{s=2}^n h_s} \right)$$

La serie (8,46) per $r = 1$ coincide con lo sviluppo (8,10) (convergente per $|\lambda| < 1/W$, ed x, α nel campo (8,16)), del *nucleo risolvete* $\mathfrak{R}(\lambda; x, \alpha)$ moltiplicato per λ , inoltre converge pure per $|\lambda| < 1/W_p$ (ed x, α nel campo (8,16)) la serie :

$$(8,47) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \left(\sum_{0, h_n, h_{n-1}, \dots, h_1}^{\infty} |s_{h_n, h_n}| |s_{h_n, h_{n-1}}| \dots |s_{h_2, h_1}| |x|^{h_n} |\alpha|^{h_1} \right) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \overset{\circ}{w}_p^n (|x|, |\alpha|)$$

come risulta da quanto si è dimostrato per la (8,20). Si conclude che la serie (8,46) per $|r| \leq 1$ è ordinabile secondo le potenze crescenti di r . Si può allora applicare il prolungamento analitico di cui al n. 2 e pertanto si otterrà :

$$(8,48) \quad \mathfrak{R}(\lambda; x, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \overset{\circ}{w}^n(x, \alpha) = \\ = \frac{\partial}{\partial \theta_{\theta=1}} \frac{1}{(2\pi i)^4} \int_{C_r} dr \int_{C_{\xi}} d\xi \int_{C_t} dt \int_{C_u} du \frac{P_o(r, \theta) \mathcal{S}(x, \alpha, \xi, r, t, u)}{\lambda \xi (1 - u \lambda \bar{w}(\xi, r, t))}$$

che è la cercata espressione esplicita (ed in *termini finiti*) del *nucleo risolvente* dell'equazione canonica (8,8), valida per :

$$(8,49) \quad |\lambda| < \frac{1}{W_p}; \quad |x| \leq R; \quad |x| \leq \frac{1}{R}$$

E' chiaro che ottenuto il *nucleo risolvente* nel campo di variabilità (8,49) è poi possibile prolungarlo a *tutto il suo campo di esistenza*. Se poi $v(r, \xi, t, u)$ è una funzione analitica e regolare per

$$(8,50) \quad |r| \leq \varrho_r; \quad |\xi| \leq 1; \quad |t| \leq 1; \quad |u| \leq \varrho_u$$

indichiamo con $\mathfrak{S}[v(r, \xi, t, u); x, \alpha, \theta]$ il funzionale analitico lineare misto della v , definito dall'espressione :

$$(8,51) \quad \mathfrak{S}[v(r, \xi, t, u); x, \alpha, \theta] = \\ = \frac{1}{(2\pi i)^4} \int_{C_r} dr \int_{C_{\xi}} d\xi \int_{C_t} dt \int_{C_u} du \frac{P_o(r, \theta) \mathcal{S}(x, \alpha, \xi, r, t, u)}{\xi} v(r, \xi, t, u)$$

è se $g(x, \alpha)$ è una funzione analitica e regolare per $|x| \leq R$ ed $|\alpha| \leq \frac{1}{R}$ indichiamo con $\mathfrak{N}[g(x, \alpha); \xi, r, t]$ il funzionale analitico lineare misto :

$$(8,52) \quad \mathfrak{N} [g(x', \alpha'); \xi, r, t] = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_x} \frac{dx'}{x'} \int_{C_\alpha} \frac{d\alpha'}{\alpha'} M \left(\frac{r}{x', \alpha'}, \xi, r, t \right) g(x', \alpha')$$

Impiegando allora le (8,51) e (8,52) possiamo dare alla (8,48) la forma più succinta seguente ⁽¹⁾ :

$$(8,53) \quad \mathfrak{R}(\lambda; x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \theta_{\theta=1}} \mathfrak{S} \left[\frac{1}{\lambda - \lambda^2 u \mathfrak{N} [w(x', \alpha'); \xi, r, t]}; x, \alpha, \theta \right]$$

dalla quale possiamo concludere che, per quella classe di equazioni funzionali lineari (8,8) qui considerata, *il nucleo risolvete si può ottenere applicando un funzionale lineare, indipendente dal nucleo $w(x, \alpha)$, alla :*

$$(8,54) \quad \frac{1}{\lambda - \lambda^2 u \mathfrak{N} [w(x', \alpha'); \xi, r, t]}$$

funzione semplicissima di un particolare funzionale analitico lineare del nucleo $w(x, \alpha)$, indipendente dal nucleo stesso.

d) Calcolo del nucleo associato e della soluzione $\gamma(x, \lambda)$ dell'equazione funzionale lineare. — Dalla (8,10) si ricava subito il nucleo associato Γ , dato infatti che :

$$(8,55) \quad \Gamma(\lambda; x, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n w^n(x, \alpha) = \frac{1}{1 - x\alpha} + \lambda \mathfrak{R}(\lambda; x, \alpha)$$

e osservando che :

$$(8,56) \quad \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{C_\xi} \frac{d\xi}{\xi} \int_{C_t} dt \int_{C_u} du \frac{1}{ut(1 - x\alpha)} \left(\frac{1}{1 - \lambda u \bar{w}(\xi, r, t)} \right) = \frac{1}{1 - x\alpha}$$

e che poi ancora :

$$(8,57) \quad \frac{\partial}{\partial \theta_{\theta=1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} dr \frac{P_o(r, \theta)}{1 - x\alpha} = \frac{1}{1 - x\alpha}$$

⁽¹⁾ Si è preferito lasciare in evidenza la derivazione rispetto a θ , invece di incorporarla nel funzionale \mathfrak{S} , data la particolare natura del funzionale analitico lineare « prolungamento » da cui essa proviene, (cfr. n. 1).

possiamo dare al *nucleo associato* l'espressione esplicita seguente :

$$(8,58) \quad \Gamma(\lambda; x, \alpha) = \\ = \frac{\partial}{\partial \theta_{\theta=1}} \frac{1}{(2\pi i)^4} \int_{c_r} dr \int_{c_\xi} d\xi \int_{c_t} dt \int_{c_u} du \frac{P_o(r, \theta) \left[\mathcal{S}(x, \alpha, \xi, r, t, u) + \frac{1}{ut(1-x\alpha)} \right]}{\xi [1 - u \lambda \bar{w}(\xi, r, t)]}$$

Se poi $v(r, \xi, t, u)$ è la stessa funzione considerata alla lettera c), indichiamo con $\mathcal{S}_a[v(r, \xi, t, u); x, \alpha, \theta]$ il funzionale analitico che si ottiene dalla espressione (8,51) sostituendo alla \mathcal{S} la funzione $\mathcal{S}(x, \alpha, \xi, r, t, u) + \frac{1}{ut(1-x\alpha)}$. La (8,58) prenderà allora la forma più breve :

$$(8,59) \quad \Gamma(\lambda; x, \alpha) = \\ = \frac{\partial}{\partial \theta_{\theta=1}} \mathcal{S}_a \left[\frac{1}{1 - u \lambda \mathcal{N}[w(x', \alpha'); \xi, r, t]}; x, \alpha, \theta \right]$$

Tenendo poi presente che un funzionale analitico misto è equivalente ad un operatore (e viceversa) possiamo indicare la *potenza n-esima* dello operatore F applicata alla generica funzione $g(x)$ di (A) con il simbolo $F^n g(x)$ e pertanto il *nucleo associato* Γ potrà anche scriversi nella forma :

$$(8,60) \quad \Gamma(\lambda; x, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n F^n \left(\frac{1}{1-x\alpha} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{2\pi i} \int_c \frac{1}{\alpha} w^n \left(x, \frac{1}{\alpha} \right) \frac{d\alpha}{1-x\alpha}$$

e per la convergenza totale della serie (8,9) avremo infine :

$$(8,61) \quad \Gamma(\lambda; x, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n w^n \left(x, \frac{1}{\alpha} \right) \right) \frac{d\alpha}{1-x\alpha} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n F^n \right) \frac{1}{1-x\alpha}$$

cioè il *nucleo associato* risulta uguale all'*indicatrice simmetrica* dell'operatore lineare :

$$(8,62) \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n F^n \right) g(x)$$

che pertanto risulta *analitico*.

L'operatore (8,62) verrà chiamato *operatore potenziale simmetrico* di F mentre l'*operatore potenziale* (emisimmetrico) di F è dato dall'espressione (1):

$$(8,63) \quad L_{\lambda}(F) g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} F^n g(x)$$

L'operatore (8,62) quindi si indicherà anche con il simbolo:

$$(8,64) \quad 1/\lambda L_{1/\lambda}(F) g(x)$$

e si avrà pure

$$(8,65) \quad \Gamma(\lambda; x, \alpha) = 1/\lambda L_{1/\lambda}(F) \frac{1}{1-x\alpha}$$

Volendo ora ottenere l'espressione esplicita della funzione $\gamma(x, \lambda)$ soluzione *unica* della (8,8) per $|\lambda| < 1/W_p$, basterà sostituire nella (8,11) al *nucleo risolvente* $\mathfrak{R}(\lambda; x, \alpha)$ la sua espressione (8,48) ovvero (8,53). Facciamo ora vedere come sia possibile permutare l'integrazione rispetto ad α del prodotto funzionale simmetrico $\mathfrak{R}(\lambda; x, \alpha) f(\alpha)$ (cfr. la (8,11)) con la derivazione rispetto a θ nel punto $\theta = 1$, che figura nell'espressione (8,53) del *nucleo risolvente*. Presa infatti una qualunque funzione $f(x)$ della regione funzionale (A), di sviluppo:

$$(8,66) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

convergente per $|x| < \varrho$, con $\varrho > R$, si ottiene dalla (8,46):

$$(8,67) \quad \left(\frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{C_{\xi}} \frac{d\xi}{\xi} \int_{C_t} dt \int_{C_u} du \frac{\mathcal{S}(x, \alpha, \xi, r, t, u)}{1 - u \lambda \bar{w}(\xi, r, t)} \right) f(\alpha) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n!+n^2} \lambda^n \left(\sum_{k_n, h_n, h_{n-1}, \dots, h_1} S_{k_n, h_n} S_{h_n, h_{n-1}} \dots S_{h_2, h_1} x^{k_n} a_{h_1} r^{2(k_n+h_1)+3\sum_{s=1}^n h_s} \right)$$

(1) In accordo con le notazioni del Prof. L. FANTAPPÌE, cfr. S. D. P.

dato che per la totale convergenza della (8,46) (come serie di funzioni analitiche di α) è possibile integrarla termine a termine. Se ora consideriamo la funzione

$$(8,68) \quad f_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| x^k$$

che converge ancora per $|x| < \rho$, si trova, tenendo presente la 8,47):

$$(8,69) \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n w_p^n(x, \alpha) \right) f_p(\alpha) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \left(\sum_{k_n, h_n, \dots, h_1}^{\infty} |s_{k_n, h_n} s_{h_n, h_{n-1}} \dots s_{h_2, h_1}| |a_{h_1}| x^{k_n} \right)$$

serie convergente per $|\lambda| < 1/W_p$ ed $|x| \leq R$.

Si conclude che la serie (8,67), considerata come serie di potenze di r , è assolutamente convergente per $r = 1$ e quindi anche per $|r| \leq 1$, perciò possiamo applicare ad essa il « prolungamento » di cui al n. 2. Otterremo così in definitiva (per la formula (8,11)):

$$(8,70) \quad \gamma(x, \lambda) = f(x) + \\ + \frac{\partial}{\partial \theta_{\theta-1}} \frac{1}{(2\pi i)^5} \int_{C_r} dr \int_{C_\xi} d\xi \int_{C_t} dt \int_{C_u} du \int_{C_\alpha} d\alpha \frac{P_o(r, \theta) \mathcal{S}\left(x, \frac{1}{\alpha}, \xi, r, t, u\right) f(\alpha)}{\alpha \xi [1 - u \lambda \bar{w}(\xi, r, t)]}$$

dove C_α è una circonferenza $(0, R_\alpha)$ con $R \leq R_\alpha < \rho$.

Possiamo allora concludere dicendo: per $|\lambda| < 1/W_p$ la soluzione unica γ della (8,8), supposte note le funzioni « invariabili » P_o , \mathcal{S} ed M , può calcolarsi con 7 integrazioni definite (calcoli di residuo) ed una derivazione.

Si osservi che nella (8,70) il prodotto $P_o \cdot \mathcal{S}$ può considerarsi quale unica funzione e quindi per il calcolo della γ occorre in sostanza calcolare due sole funzioni « invariabili », calcolo che, è bene ripetere, sarà effettuato una volta per sempre.

Impiegando poi la formula (8,53) possiamo dare alla (8,70) la forma più compatta:

$$(8,71) \quad \gamma(x, \lambda) = f(x) + \frac{\partial}{\partial \theta_{\theta-1}} \mathcal{S} \left[\frac{1}{1 - u \lambda \mathcal{W} [w(x', \alpha'); \xi, r, t]}; x, \alpha, \theta \right] f(\alpha)$$

ovvero dalla (8,59) :

$$(8,72) \quad \begin{aligned} \gamma(x, \lambda) &= \Gamma(\lambda; x, \overset{\circ}{\alpha}) f(\overset{\circ}{\alpha}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta_{\theta=1}} \mathfrak{S}_a \left[\frac{1}{1 - u \lambda \mathfrak{N}[w(x', \overset{\circ}{\alpha}'); \xi, r, t]} ; x, \overset{\circ}{\alpha}, \theta \right] f(\overset{\circ}{\alpha}) \end{aligned}$$

e se $v(r, \xi, t, u, \alpha)$ è una funzione regolare per $|r| \leq \varrho_r$; $|\xi| \leq 1$; $|t| \leq 1$; $|u| \leq \varrho_u$; $|\alpha| \leq R_\alpha$ (con $R_\alpha \geq R$), posto :

$$(8,73) \quad \begin{aligned} &\mathfrak{S}_b[v(r, \xi, t, u, \alpha); x, \theta] = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^5} \int_{C_r} dr \int_{C_\xi} d\xi \int_{C_t} dt \int_{C_u} du \int_{C_\alpha} d\alpha \frac{P_o(r, \theta) S(x, 1/\alpha, \xi, r, t, u)}{\alpha \xi} v(r, \xi, t, u, \alpha) \end{aligned}$$

potremo scrivere la (8,72) nell'altra forma :

$$(8,74) \quad \begin{aligned} \gamma(x, \lambda) &= \frac{\partial}{\partial \theta_{\theta=1}} \mathfrak{S}_b \left[\frac{f(\alpha)}{1 - u \lambda \mathfrak{N}[w(x', \alpha'); \xi, r, t]} ; x, \theta \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta_{\theta=1}} \mathfrak{S}_b \left[\frac{f(\alpha)}{1 - u \lambda \bar{w}(\xi, r, t)} ; x, \theta \right] \end{aligned}$$

cioè: la soluzione γ della (8,8) risulta un funzionale lineare indipendente dal nucleo $w(x, \alpha)$ e dal termine noto $f(x)$, della funzione :

$$(8,75) \quad \frac{f(\alpha)}{1 - u \lambda \mathfrak{N}[w(x', \alpha'); \xi, r, t]}$$

prodotto della $f(\alpha)$ per una funzione (fissa) di un funzionale lineare \mathfrak{N} del nucleo $w(x, \alpha)$, indipendente dal nucleo stesso.

Si osservi ora che dalle (8,11) ed (8,65) si ricava :

$$(8,76) \quad \gamma(x, \lambda) = \left(1/\lambda L_{1/\lambda}(F) \frac{1}{1 - x\alpha} \right) f(\overset{\circ}{\alpha}) = 1/\lambda L_{1/\lambda}(F) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n F^n f(x)$$

e si può anche scrivere simbolicamente⁽¹⁾ (sommando la serie geometrica in F) :

⁽¹⁾ Cfr. C. S. e S. D. P.

$$(8,77) \quad \gamma(x, \lambda) = \frac{1}{1 - \lambda F} f(x)$$

Se ora confrontiamo la (8,74) con la (8,77) notiamo lo *stretto legame di struttura* tra le due formule delle quali la prima traduce in calcolo effettivo i simboli della seconda. Ritorneremo sull'argomento al n. 10. Osserviamo infine che l'ipotesi restrittiva $\varrho_1 \varrho_2 > 1$, relativa al campo di convergenza dello sviluppo in serie doppia di potenze della $w(x, \alpha)$, esclude dalla classe di operatori F considerata, l'operatore « *integrazione da x_0 ad x* » e quello « *derivazione* ». Per le applicazioni è quindi necessario estendere i risultati ad una classe più ampia di funzionali analitici misti, cioè di operatori analitici, il che sarà oggetto del n. seguente.

9. Calcolo, con integrali definiti, del nucleo risolvente di una più ampia classe di equazioni funzionali lineari. — Sia F un operatore analitico (funzionale analitico lineare misto) definito nella regione funzionale (A) , dove A è l'insieme chiuso (dominio):

$$(9,1) \quad |x| \leq \bar{\varrho}$$

Tutte le funzioni $y(x)$ di (A) ammettono allora uno sviluppo in serie di potenze della x del tipo:

$$(9,2) \quad y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

convergente per $|x| < \varrho$ con $\varrho > \bar{\varrho}$ (infatti essendo y regolare in A lo sarà pure in un cerchio un po' più ampio).

Supponiamo ancora che l'operatore F possa applicarsi quante volte si vuole ad una qualunque prefissata funzione y di (A) per il che è *condizione sufficiente* che l'operatore F trasformi ogni funzione di (A) in un'altra funzione di (A) .

Quest'ultima ipotesi sull'operatore F , per brevità di linguaggio nel seguito l'indicheremo con *ipotesi (i)* (dove con la lettera (i) intendiamo di abbreviare la parola *iterazione*).

Consideriamo la funzione:

$$(9,3) \quad \frac{1}{1 - x\alpha}$$

per α variabile in una regione al finito Ω_α , semplicemente connessa e non ricoprentensi del piano α .

La (9,3) come funzione della x verrà definita ovunque nel piano x escluso il punto (di non definizione (1)), $x = \frac{1}{\alpha}$. In queste ipotesi al variare di α in Ω_α , l'insieme $I(\alpha)$ ove non è definita la funzione della x , $\frac{1}{1-x\alpha}$, varia con continuità (2). Si conclude che per α in Ω_α la (9,3) rappresenta una *linea analitica* (3) dello spazio funzionale analitico che per l'ipotesi fatta sulla regione Ω_α è pure *regolare*.

Se nel nostro caso prendiamo quale regione Ω_α quella definita dalla relazione :

$$(9,4) \quad |\alpha| < \frac{1}{\bar{\varrho}}$$

allora la $\frac{1}{1-x\alpha}$, per ogni α di Ω_α , come funzione della x appartiene ad (A), infatti essa è regolare per $|x| < \frac{1}{|\alpha|}$, dove $1/|\alpha|$ per la (9,4) è maggiore di $\bar{\varrho}$.

L'indicatrice simmetrica di F :

$$(9,5) \quad w(x, \alpha) = F \left[\frac{1}{1-\alpha t}; x \right] = F \frac{1}{1-\alpha x}$$

risulta perciò analitica rispetto ad α e regolare per $|\alpha| < 1/\bar{\varrho}$, essa inoltre per l'ipotesi (i) è anche regolare (per ogni α tale che per $|\alpha| \leq 1/\bar{\varrho}$ per $|x| \leq \bar{\varrho}$ quindi è sviluppabile in serie doppia di potenze del tipo :

$$(9,6) \quad w(x, \alpha) = \sum_{k, h}^{\infty} s_{k, h} x^k \alpha^h$$

che converge certamente per ogni α tale che $|\alpha| < 1/\bar{\varrho}$ e per $|x| < \varrho_1$, dove $\varrho_1 = \varrho_1(\alpha)$, per quanto si è detto, è sempre maggiore di $\bar{\varrho}$ e quindi l'estremo inferiore di $\varrho_1(\alpha)$ per $|\alpha| < 1/\bar{\varrho}$ sarà sempre un numero $\bar{\varrho}_1$ maggiore od uguale a $\bar{\varrho}$.

(1) Cfr. N. F. pag. 662.

(2) » » » 641.

(3) » » » 641 e 662.

Distingueremo due casi :

- I) $\bar{\varrho}_1 > \bar{\varrho}$
 II) $\bar{\varrho}_1 = \bar{\varrho}$

Nel primo caso ci troviamo nelle stesse condizioni del n. 8, infatti (si osservi che ora è $\varrho_2 = 1/\bar{\varrho}$) :

$$\bar{\varrho}_1 \cdot \frac{1}{\bar{\varrho}} > 1$$

e quindi vale tutto quello che già si è detto e le formule finali sono le stesse. Consideriamo allora il secondo caso, cioè supponiamo che sia $\bar{\varrho}_1 = \bar{\varrho}$.

Dato che, come si è visto, la funzione $w(x, \alpha)$ è regolare, per ogni α tale che $|\alpha| < 1/\bar{\varrho}$, per $|x| \leq \bar{\varrho}$, fissato allora α qualunque sulla circonferenza $(0, \alpha_0)$ con $\alpha_0 < 1/\bar{\varrho}$, la $w(x, \alpha)$ considerata come funzione della sola x , risulterà regolare nell'interno di un cerchio $(0, \varrho(\alpha))$ con $\varrho(\alpha) < \bar{\varrho}$.

Facciamo vedere che l'estremo inferiore di $\varrho(\alpha)$ per α variabile sulla $(0, \alpha_0)$ è maggiore di $\bar{\varrho}$.

Infatti la $w(x, \alpha)$ è regolare in ogni punto (\bar{x}, α) , essendo α un punto della circonferenza $(0, \alpha_0)$ ed \bar{x} un punto della circonferenza $(0, \bar{\varrho})$, la w pertanto considerata come funzione della sola x è sviluppabile in serie di TAYLOR convergente per $|x - \bar{x}| < \varrho'$ con $\varrho' = \varrho'(\bar{x}, \alpha)$ diverso da zero per l'ipotesi.

Al variare di α sulla circonferenza $(0, \alpha_0)$ e di \bar{x} sulla circonferenza $(0, \bar{\varrho})$, varia ϱ' mantenendosi diverso da zero.

Dimostriamo che l'estremo inferiore di ϱ' è diverso da zero.

Infatti supposto che invece detto estremo inferiore sia nullo, esiste certo almeno un punto (\bar{x}', α') (di WEIERSTRASS) con \bar{x}' sulla $(0, \bar{\varrho})$ ed α' sulla $(0, \alpha_0)$, in ogni intorno del quale (su dette circonferenze) l'estremo inferiore di ϱ' è ancora lo zero. Ma in (\bar{x}', α') al w ammette uno sviluppo in serie doppia di potenze convergente in un intorno δ :

$$|x - \bar{x}'| < \varrho'' \quad |\alpha - \alpha'| < \varrho'''$$

con ϱ'' e ϱ''' entrambi diversi da zero per l'ipotesi, perciò in ogni punto (x_1, α_1) interno all'intorno δ di (\bar{x}', α') :

$$|x - \bar{x}'| < \varrho''/2 \quad |\alpha - \alpha'| < \varrho'''/2$$

lo sviluppo della w convergerà almeno per

$$|x - x_1| < \varrho''/2 \quad |\alpha - \alpha_1| < \varrho''/2$$

e quindi per tutti gli intorno di (\bar{x}, α') sulle $(0, \bar{\varrho})$ e $(0, \alpha_o)$ interni all'intorno δ' , l'estremo inferiore di ϱ' vale almeno $\varrho''/2$ e quindi è diverso da zero contro quanto supposto.

Se indichiamo allora con \varkappa detto estremo inferiore di ϱ' , resta dimostrato che l'estremo inferiore $\varrho_o(\alpha_o)$ di $\varrho(\alpha)$, per α variabile sulla $(0, \alpha_o)$ risulta non minore di $\bar{\varrho} + \varkappa$.

Possiamo così anche dire che lo sviluppo (9,6) della w converge per $|\alpha| \leq \alpha_o < 1/\bar{\varrho}$ e per $|x| < \varrho_o(\alpha_o)$. Dovremo naturalmente supporre che preso α_o qualunque minore di $1/\bar{\varrho}$, sia sempre:

$$(9,6)' \quad \alpha_o \cdot \varrho_o(\alpha_o) \leq 1$$

dato che altrimenti si ricadrebbe nel primo caso già studiato. E' chiaro poi anche che se $\alpha_o < \alpha_o'$, $\varrho_o(\alpha_o) \geq \varrho_o(\alpha_o')$.

Applichiamo allora l'operatore F alla sua indicatrice $w(x, \alpha)$ nella quale la variabile α sia fissata in modo che $|\alpha| \leq \alpha_o < 1/\bar{\varrho}$, si otterrà:

$$(9,7) \quad F[w(t, \alpha); x] = w(x, \alpha_1) w(\alpha_1, \alpha) = \overset{\circ}{w}^2(x, \alpha) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{1}{\alpha_1} w\left(x, \frac{1}{\alpha_1}\right) w(\alpha_1, \alpha) d\alpha_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \left(\frac{1}{\alpha_1} \sum_{k_2, h_2}^{\infty} s_{k_2, h_2} \frac{x^{k_2}}{\alpha_1^{h_2}} \right) \left(\sum_{k_1, h_1}^{\infty} s_{k_1, h_1} \alpha_1^{k_1} \alpha^{h_1} \right) d\alpha_1$$

dove C_1 è per es. la circonferenza $(0, R_1)$ con $\bar{\varrho} < R_1 < \varrho_o(\alpha_o)$. Nella (9,7) per α_1 su C_1 si ha che $\frac{1}{|\alpha_1|} = \frac{1}{R_1} < \frac{1}{\bar{\varrho}}$, quindi lo sviluppo della funzione $\frac{1}{\alpha_1} w\left(x, \frac{1}{\alpha_1}\right)$:

$$(9,8) \quad \frac{1}{\alpha_1} \sum_{k_2, h_2}^{\infty} s_{k_2, h_2} \frac{x^{k_2}}{\alpha_1^{h_2}}$$

per α_1 su C_1 convergerà per $|x| < \varrho_o\left(\frac{1}{R_1}\right)$ con $\varrho_o\left(\frac{1}{R_1}\right) > \bar{\varrho}$, quindi dal prodotto funzionale (9,7), otterremo:

$$(9,9) \quad \overset{\circ}{w}^2(x, \alpha) = \sum_{k_2, h_2, h_1}^{\infty} s_{k_2, h_2} s_{h_2, h_1} x^{k_2} \alpha^{h_1}$$

La serie così trovata converge per $|\alpha| \leq \alpha_0$ ed $|x| < \varrho_0 \left(\frac{1}{R_1} \right)$ dove, come si è detto, risulta $\varrho_0 \left(\frac{1}{R_1} \right) > \bar{\varrho}$ e poichè (cfr. la (9,6)) $\alpha_0 \leq \frac{1}{\varrho_0(\alpha_0)} < \frac{1}{R_1}$ è pure $\varrho_0 \left(\frac{1}{R_1} \right) \leq \varrho_0(\alpha_0)$.

Questo porta di conseguenza che volendo applicare alla funzione $\overset{\circ}{w}^2(x, \alpha)$, ottenuta con la (9,9), nuovamente l'operatore F la curva separatrice da impiegarsi nel prodotto funzionale simmetrico della indicatrice w per la $\overset{\circ}{w}^2(x, \alpha)$ non sarà più la curva C_1 della (9,7), ma sarà invece (p. es.) una circonferenza $C_2 = (0, R_2)$ con $\bar{\varrho} < R_2 < \varrho_0 \left(\frac{1}{R_1} \right)$ che non può coincidere con la C_1 perchè (cfr. la (9,6)) $\varrho_0 \left(\frac{1}{R_1} \right) \leq R_1$. Si avrà allora :

$$(9,10) \quad \begin{aligned} F[\overset{\circ}{w}^2(x, \alpha); x] &= \overset{\circ}{w}^3(x, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{1}{\alpha_2} w\left(x, \frac{1}{\alpha_2}\right) \overset{\circ}{w}^2(\alpha_2, \alpha) d\alpha_2 = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \left(\frac{1}{\alpha_2} \sum_{k_3, h_3}^{\infty} s_{k_3, h_3} \frac{x^{k_3}}{\alpha_2^{h_3}} \right) \left(\sum_{k_2, h_2, h_1}^{\infty} s_{k_2, h_2} s_{h_2, h_1} \alpha_2^{k_2} \alpha^{h_1} \right) d\alpha_2 \end{aligned}$$

e ragionando in modo identico a quello seguito per la (9,7) si trova che :

$$(9,11) \quad \overset{\circ}{w}^3(x, \alpha) = \sum_{k_3, h_3, h_2, h_1}^{\infty} s_{k_3, h_3} s_{h_3, h_2} s_{h_2, h_1} x^{k_3} \alpha^{h_1}$$

dove la serie a secondo membro della (9,11) convergerà per $|\alpha| \leq \alpha_0 < 1/\bar{\varrho}$ e per $|x| < \varrho_0 \left(\frac{1}{R_2} \right)$ con $\bar{\varrho} < \varrho_0 \left(\frac{1}{R_2} \right) \leq \varrho_0 \left(\frac{1}{R_1} \right)$.

Il fatto importante che bisogna ora considerare è che gli sviluppi (9,9) e (9,11) rispettivamente delle funzioni $\overset{\circ}{w}^2(x, \alpha)$ e $\overset{\circ}{w}^3(x, \alpha)$, non dipendono dalle curve separatrici (relativamente ai coefficienti) e sono identici a quelli trovati nel caso *I* (potendo però variare soltanto i relativi campi di convergenza) come si verifica subito confrontandoli rispettivamente con gli sviluppi (7,3) e (7,6).

Così pure per la potenza *n*-esima di composizione simmetrica della w , anche nel caso *II* troveremo uno sviluppo in serie identico a quello dato dalla (7,8) nel caso *I*, cioè :

$$(9,12) \quad \overset{\circ}{w}^n(x, \alpha) = \sum_{k_n, h_n, h_{n-1}, \dots, h_1}^{\infty} s_{k_n, h_n} s_{h_n, h_{n-1}} \dots s_{h_2, h_1} x^{k_n} \alpha^{h_1}$$

serie convergente per $|\alpha| \leq \alpha_0 < 1/\bar{\varrho}$ ed $|x| < \varrho_0 \left(\frac{1}{R_{n-1}} \right)$, avendo indicato con R_{n-1} il raggio della circonferenza separatrice $(0, R_{n-1})$, in stretta analogia con quanto si è visto per le (9,9) e (9,11). Se ora consideriamo la parallela $w_p(x, \alpha)$ della $w(x, \alpha)$ di sviluppo (8,18) troviamo che detto sviluppo convergerà anch'esso per $|\alpha| \leq \alpha_0 < 1/\bar{\varrho}$ ed $|x| < \varrho_0(\alpha_0)$, possiamo quindi ripetere anche per la w_p tutto quello che è stato detto per la w e quindi in generale la serie:

$$(9,12)' \quad w_p^n(x, \alpha) = \sum_0^{\infty} s_{k_n, h_n, h_{n-1}, \dots, h_1} |s_{k_n, h_n} s_{h_n, h_{n-1}} \dots s_{h_2, h_1}| x^{k_n} \alpha^{h_1}$$

convergerà anch'essa per $|\alpha| \leq \alpha_0 < 1/\bar{\varrho}$ e per $|x| < \varrho_0 \left(\frac{1}{R_{n-1}} \right)$. Ma allora la somma della serie (9,12) può calcolarsi nello stesso modo con il quale si è ottenuta quella della (7,8), cioè più precisamente, s'impiegheranno ancora la stessa funzione preparatrice n -esima $M_{n,2}$ data dalla (7,12) e la funzione-stampo \mathbf{S} data dalla (7,14), ed infine varrà ancora per la $w^n(x, \alpha)$ la formula di costruzione (7,17).

Così vale ancora tutto ciò che si è detto al n. 8 per la preparatrice e per la preparata generali, soltanto che ora nella formula (8,28) che ci dà la preparata generale $\bar{w}(\xi, r, t)$ della w , prenderemo quali curve separatrici C_x e C_α , rispettivamente le circonferenze $(0, R_x)$ e $(0, R_\alpha)$ con $0 < R_x \leq \bar{\varrho}$ e $0 < R_\alpha < 1/\bar{\varrho}$ e prenderemo $|r| \leq \varrho_r$, essendo ϱ_r minore di R_x ed R_α , ($\varrho_r < 1$); quindi indicato con W il massimo di $|w(x, \alpha)|$ per $|x| \leq R_x$ ed $|\alpha| \leq R_\alpha$, si avrà dalla (8,27) ⁽¹⁾:

$$(9,13) \quad |\bar{w}(\xi, r, t)| \leq \frac{\varrho_r R_x R_\alpha W}{(R_x - \varrho_r)(R_\alpha - \varrho_r)(1 - \varrho_r)}$$

Osservato poi che se W_p è il massimo di $|w_p(x, \alpha)|$ per $|x| \leq R_x$ ed $|\alpha| \leq R_\alpha$, essendo w_p la parallela della w definita dalla (8,18), anche ora si avrà $W_p \geq W$, analogamente si deduce che la serie (8,33) per $|\lambda| < 1/W$ convergerà per:

$$(9,14) \quad |u| \leq \varrho_u < \frac{(R_x - \varrho_r)(R_\alpha - \varrho_r)(1 - \varrho_r)}{\varrho_r R_x R_\alpha}$$

(1) Si osservi infatti che per $|x| \geq R_x$ ed $|\alpha| \geq R_\alpha$ risulta:

$$\left| M \left(\frac{r}{x}, \frac{r}{\alpha}, \xi, t \right) \right| \leq \frac{\varrho_r}{\left(1 - \frac{\varrho_r}{R_x}\right) \left(1 - \frac{\varrho_r}{R_\alpha}\right) (1 - \varrho_r)}$$

Conseguentemente possiamo scrivere anche in questo caso (cfr. la (8,46)) :

$$(9,15) \quad \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{C_\xi} \frac{d\xi}{\xi} \int_{C_t} dt \int_{C_u} du \frac{\mathcal{S}(x, \alpha, \xi, r, t, u)}{\lambda - u \lambda^2 \bar{w}(\xi, r, t)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} r^{n_1+n_2} \lambda^{n-1} \left(\sum_{0, k_n, h_n, h_{n-1}, \dots, h_1}^{\infty} s_{k_n, h_n} s_{h_n, h_{n-1}} \dots s_{h_2, h_1} x^{k_n} \alpha^{h_1} r^{2(k_n+h_1)+3\sum_{s=2}^n h_s} \right)$$

Dato però che in questo *II* caso la curva separatrice si deve cambiare ad ogni successivo prodotto funzionale simmetrico nel calcolo della potenza *n*-esima di composizione, non si può dare una formula di maggioranza come la (8,14) nel caso *I* che ci permetteva senz'altro di concludere in senso affermativo per la convergenza dello sviluppo (8,10) del *nucleo risolvente*. È necessario perciò *aggiungere* l'ipotesi che detto sviluppo converga ed anzi, per potere applicare con semplicità i risultati dei nn. precedenti, noi supporremo di più che converga la serie :

$$(9,16) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} w_p^n(x, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \left(\sum_{0, k_n, h_n, \dots, h_1}^{\infty} |s_{k_n, h_n} s_{h_n, h_{n-1}} \dots s_{h_2, h_1}| x^{k_n} \alpha^{h_1} \right)$$

per $|\lambda| \leq \lambda_0$ (dove λ_0 è un certo numero reale positivo) e che la sua somma risulti funzione analitica delle variabili x ed α , regolare per $|x| \leq \bar{\varrho}$ ed $|\alpha| < 1/\bar{\varrho}$. Da qui discende che la somma della (9,16) nel dominio :

$$(9,17) \quad |\lambda| \leq \lambda_0; \quad |x| \leq \bar{\varrho}; \quad |\alpha| \leq \alpha_0 < 1/\bar{\varrho}$$

raggiungerà in modulo un certo valore massimo N . Allora per la nota formula di CAUCHY applicata alla (9,16), considerata come funzione di λ , si avrà in detto dominio :

$$(9,18) \quad \left| \sum_{0, k_n, h_n, \dots, h_1}^{\infty} |s_{k_n, h_n} s_{h_n, h_{n-1}} \dots s_{h_2, h_1}| x^{k_n} \alpha^{h_1} \right| < \frac{N}{\lambda_0^{n-1}}$$

si conclude che la (9,16) per ogni λ tale che $|\lambda| < \lambda_0$, considerata quale serie di funzioni di x e di α converge totalmente per $|x| \leq \bar{\varrho}$ ed $|\alpha| \leq \alpha_0 < 1/\bar{\varrho}$. È poi chiaro che la somma delle (9,16) è il *nucleo risolvente* della equazione funzionale lineare :

$$(9,19) \quad \gamma_p(x, \lambda) - \lambda w_p(x, \alpha) \gamma_p(\alpha, \lambda) = f(x)$$

che chiameremo equazione *parallela* della (8,8).

Analogamente diremo che l'operatore F_p , d'indicatrice simmetrica w_p , è il *parallelo* dell'operatore F .

Dalla ipotesi relativa allo sviluppo (9,16) discende che per ogni λ tale che $|\lambda| < \lambda_0$ converge *totalmente*, quale serie di funzioni di x e di α per $|x| \leq \bar{\varrho}$ ed $|\alpha| < \alpha_0 < \frac{1}{\bar{\varrho}}$, lo sviluppo del *nucleo risolvante* della (8,8):

$$(9,20) \quad \mathfrak{R}(\lambda; x, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} w^n(x, \alpha)$$

Gli operatori analitici lineari F che godono delle proprietà richieste all'inizio del presente n., caso *II* e tali che il loro *parallelo* F_p soddisfa alla condizione ora imposta, per brevità d'espressione verranno chiamati operatori lineari « a ».

Ritornando alla serie (9,15) possiamo ora dire che, se la w è l'indicatrice simmetrica di un operatore « a », essa converge per $r = 1$ riducendosi alla serie (9,20) ed inoltre converge pure la corrispondente serie di moduli (9,16) per

$$(9,21) \quad |\lambda| \leq \lambda'_0 < \lambda_0; \quad |x| \leq \bar{\varrho}; \quad |\alpha| \leq \alpha_0 < 1/\bar{\varrho}$$

pertanto la (9,15), nel campo di variabilità (9,21), può essere ordinata secondo le potenze crescenti della r , risultando così *assolutamente convergente* (quale serie di potenze della r), per $|r| \leq 1$.

Possiamo allora senz'altro applicare la stessa formula (8,48) per calcolare il nucleo risolvante (9,20), cioè:

$$(8,48)' \quad \mathfrak{R}(\lambda; x, \alpha) = \\ = \frac{\partial}{\partial \theta_{\theta=1}} \frac{1}{(2\pi i)^4} \int_{c_r} dr \int_{c_\xi} d\xi \int_{c_t} dt \int_{c_u} du \frac{P_0(r, \theta) \mathcal{S}(x, \alpha, \xi, r, t, u)}{\lambda \xi [1 - u \lambda \bar{w}(\xi, r, t)]}$$

dove però s'intenda di prendere $|\lambda| \leq \lambda''_0$ essendo λ''_0 un numero positivo minore di λ_0 e di $1/W_p$ (infatti per la convergenza della (8,33) abbiamo preso $|\lambda| < 1/W_p$).

In definitiva si può dire che *tutte le formule date al n. 8 valgono anche nel caso degli operatori lineari «a»* i quali in sostanza sono individuati, è bene ripeterlo, dalle condizioni:

1.° L'operatore è analitico e lineare definito nella regione funzionale (A) e trasforma ogni funzione di (A) in un'altra funzione di (A).

2.° Lo sviluppo del *nucleo risolvante* relativo all'operatore *parallelo* corrispondente, converge per $|\lambda| \leq \lambda_0$ e la sua somma è funzione analitica di x e di α regolare per $|x| \leq \bar{\rho}$ ed $|\alpha| < 1/\bar{\rho}$.

Per la convergenza *totale* della serie (9,20), analogamente a quanto si è dimostrato al n. 8, si deduce che il *nucleo associato* alla $w(x, \alpha)$:

$$(9,22) \quad \Gamma(\lambda; x, \alpha) = \frac{1}{1 - x\alpha} + \lambda \mathfrak{R}(\lambda; x, \alpha)$$

è l'*indicatrice simmetrica* dell'operatore:

$$(9,23) \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n F^n \right) g(x) = 1/\lambda L_{1/\lambda}(F) h(x)$$

dove $h(x)$ è una generica funzione di (A).

L'operatore definito dalla (9,23) sarà anche ora chiamato *l'operatore potenziale simmetrico* di F (cfr. n. 8).

In quanto alle applicazioni dei risultati ottenuti, come già ho detto nella *Premessa*, in questo lavoro mi limito soltanto al calcolo degli operatori che sono funzioni di un dato operatore analitico lineare, come vedremo nel numero seguente.

In un prossimo lavoro invece, mostrerò che analoghi risultati si ottengono per le equazioni funzionali lineari con funzioni incognite in più variabili e darò anche in forma esplicita mediante integrali definiti il nucleo risolvante *dell'equazione integrale di seconda specie di FREDHOLM, di quella di VOLTERRA* e di una speciale classe di equazioni integro-differenziali alla cui risoluzione può ridursi il calcolo dell'integrale generale dell'*equazione alle derivate parziali a coefficienti variabili di ordine qualunque* ed in un qualunque numero di variabili con le condizioni di CAUCHY su un'ipersuperficie generica.

10. Espressione esplicita, mediante integrali definiti, degli operatori funzioni di un dato operatore analitico lineare. — Il calcolo degli operatori che sono funzioni di un dato operatore analitico lineare è stato sta-

bilito con il massimo rigore dal Prof. L. FANTAPPIÈ. Dato infatti un operatore analitico lineare F , definito in una regione funzionale (A) , si dimostra che⁽¹⁾: per coordinare in modo univoco ad ogni funzione $g(\lambda)$ variabile in una certa regione funzionale (Φ) , un operatore lineare da indicarsi con $g(F)$, in modo che l'operatore F e le sue funzioni $g(F)$ possano trattarsi simbolicamente come quantità algebriche ordinarie, è sufficiente che l'equazione *fondamentale* per l'operatore F :

$$(10,1) \quad \gamma(x, \lambda) - \lambda F \gamma(x, \lambda) = f(x)$$

(dove $f(x)$ è di (A)) ammetta una soluzione $\gamma(x, \cdot)$ unica in (A) (che coincide con l'operatore *potenziale simmetrico* di F applicato alla f). L'operatore $g(F)f$ è allora dato dal *prodotto funzionale simmetrico* (cfr. n. 4) della $\gamma(x, \lambda)$ per la $g(\lambda)$, cioè:

$$(10,2) \quad g(F)f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} \frac{1}{\lambda} \gamma\left(x, \frac{1}{\lambda}\right) g(\lambda) d\lambda$$

La stessa formula vale ancora nel caso⁽²⁾ in cui l'equazione *fondamentale* (10,1) non ha soluzione unica purchè l'operatore *potenziale simmetrico* di F applicato alla f e che indichiamo ancora con $\gamma(x, \lambda)$, cioè

$$(10,3) \quad \gamma(x, \lambda) = 1/\lambda L_{1/\lambda}(F)f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n F^n f(x)$$

converga in un intorno di $\lambda = 0$ e se inoltre detto operatore risulta analitico e trasformante ogni funzione di (A) in un'altra di (A) . Si osservi ora che gli operatori analitici lineari « a » soddisfano ai requisiti ora enunciati e quindi se F è un operatore « a », applicando i risultati ottenuti ai nn. precedenti, come ora vedremo, si può esprimere l'operatore $g(F)f$ dato dalla (10,2), mediante integrali definiti in numero finito ed una derivazione quando, supposte note le funzioni «*invariabili*» P_o , \mathcal{S} ed M , sia data soltanto l'*indicatrice simmetrica* $w(x, \alpha)$ dell'operatore F .

Tenendo presente il valore di λ''_o (cfr. n. 9) consideriamo la regione funzionale (Φ) delle funzioni $g(\lambda)$ analitiche e regolari in un insieme

⁽¹⁾ Cfr. G. S. ed S. D. P.

⁽²⁾ Cfr. S. MARTIS in BIDDAU: *Sulle funzioni di operatori lineari.* — « Rend. della Acc. Nazionale dei Lincei », Vol. XXV, s. 6.^a 1937.

chiuso Φ il quale può essere qualunque purchè contenga il cerchio $(0, 1/\lambda''_0)$. Allora per ogni $g(\lambda)$ di (Φ) , l'operatore $g(F)f(x)$, qualunque sia $f(x)$ di (A) , sarà dato dalla formula (10,2), dove C_λ sarà una curva chiusa contenente Φ e sulla quale e nell'interno la $g(\lambda)$ sia ancora regolare. Se poi $\Gamma(\lambda; x, \alpha)$ è il *nucleo associato* dell'*indicatrice simmetrica* $w(x, \alpha)$ di F , sappiamo che (cfr. la (8,11) e (8,74)):

$$(10,4) \quad \gamma(x, \lambda) = \Gamma(\lambda; x, \alpha) f(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \theta_{\theta=1}} \mathfrak{S}_b \left[\frac{f(\alpha)}{1 - u \lambda \bar{w}(\xi, r, t)}; x, \theta \right]$$

e quindi si avrà dalla (10,2):

$$(10,5) \quad \begin{aligned} g(F)f(x) &= \Gamma(\lambda; x, \alpha) f(\alpha) g(\lambda) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} \frac{g(\lambda) d\lambda}{\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_{\theta=1}} \mathfrak{S}_b \left[\frac{f(\alpha)}{1 - \frac{u}{\lambda} \bar{w}(\xi, r, t)}; x, \theta \right] \right) \end{aligned}$$

Dimostriamo ora che nel terzo membro della (10,5), l'integrazione rispetto a λ è permutabile con la derivazione rispetto a θ nel punto $\theta=1$. Si osservi infatti che, posto $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ e $g(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \lambda^k$, si ottiene:

$$(10,6) \quad \begin{aligned} g(F)f(x) &= \Gamma(\lambda; x, \alpha) f(\alpha) g(\lambda) = \\ &= b_0 f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\sum_{k_1, k_2, \dots, k_n}^{\infty} s_{k_n, k_n} s_{k_n, k_{n-1}} \dots s_{k_2, k_1} a_{k_1} x^{k_n} \right) \end{aligned}$$

e se poniamo:

$$(10,7) \quad \Gamma_p(\lambda; x, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n w_p^n(x, \alpha)$$

dove w_p è la *parallela* della w e dove la serie (10,7) per ipotesi (cfr. n. 9) converge per $|\lambda| \leq \lambda_0$ e la somma è funzione analitica e regolare per $|x| \leq \bar{\rho}$ ed $|\alpha| < 1/\bar{\rho}$, posto ancora $f_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| x^k$ e $g_p(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \lambda^k$ troviamo:

$$(10,8) \quad \begin{aligned} & \Gamma_p(\overset{\circ}{\lambda}; x, \overset{\circ}{\alpha}) f_p(\overset{\circ}{\alpha}) g_p(\overset{\circ}{\lambda}) = \\ & = |b_o| f_p(x) + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \left(\sum_{k_n, h_n, \dots, h_1}^{\infty} |s_{k_n, h_n} s_{h_n, h_{n-1}} \dots s_{h_2, h_1} a_{h_1}| x^{k_n} \right) \end{aligned}$$

serie convergente per $|x| \leq \varrho$ con $\varrho > \bar{\varrho}$.

Inoltre per le (8,74), (8,73) ed (8,67) ne viene che :

$$(10,9) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{c_\lambda} \frac{g(\lambda) d\lambda}{\lambda} \left(\mathfrak{S}_b \left[\frac{f(\alpha)}{1 - \frac{u}{\lambda} \bar{w}(\xi, r, t)}; x, \theta \right] \right) = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_r} P_o(r, \theta) dr \left\{ b_o f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} r^{n_1 + n_2} b_n \left(\sum_{k_n, h_n, \dots, h_1}^{\infty} s_{k_n, h_n} \dots s_{h_2, h_1} a_{h_1} x^{k_n} r^{2(k_n + h_1) + 3 \sum_{s=2}^n h_s} \right) \right\} \end{aligned}$$

nella quale la serie entro le graffe, considerata quale serie di potenze di r , converge assolutamente per $r = 1$ (e quindi anche per $|r| \leq 1$) poiché per $r = 1$ la corrispondente serie dei moduli coincide con la serie (10,8) in cui si sia posto $|x|$ al posto di x .

Possiamo quindi prolungare la somma di detta serie dal cerchio $|r| \leq \varrho_r$, ove ora è nota, al punto $r = 1$ il che si ottiene come sappiamo (cfr. n. 2) calcolando la derivata del secondo membro (o del primo) della (10,9) rispetto a θ nel punto $\theta = 1$, e si otterrà per risultato proprio $g(F) f(x)$, come subito si verifica guardando la (10,6), cioè :

$$(10,10) \quad g(F) f(x) = \frac{\partial}{\partial \theta_{\theta=1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{c_\lambda} \frac{g(\lambda) d\lambda}{\lambda} \left(\mathfrak{S}_b \left[\frac{f(\alpha)}{1 - \frac{u}{\lambda} \bar{w}(\xi, r, t)}; x, \theta \right] \right)$$

Poichè l'integrazione rispetto a λ è permutabile con \mathfrak{S}_b (cfr. la 8,73) e dato che :

$$(10,11) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{c_\lambda} \frac{g(\lambda) d\lambda}{\lambda - u \bar{w}(\xi, r, t)} = g(u \bar{w}(\xi, r, t))$$

avremo infine :

$$(10,12) \quad \begin{aligned} g(F) f(x) &= \frac{\partial}{\partial \theta_{\theta=1}} \mathfrak{S}_b [g(u \bar{w}(\xi, r, t)) f(\alpha); x, \theta] = \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta_{\theta=1}} \mathfrak{S}_b [g(u \mathfrak{N} [w(x', \alpha'); \xi, r, t]) f(\alpha); x, \theta] \end{aligned}$$

Si osservi poi che la funzione $\gamma(x, \lambda)$ soluzione della (8,8), come risulta dalla (8,77), può interpretarsi come il risultato dell'applicazione alla $f(x)$ dell'operatore *funzione* di F , $\frac{1}{1-\lambda F}$; la (10,12) quindi comprende come caso particolare la (8,74) con cui si identifica per

$$(10,13) \quad g(v) = \frac{1}{1-\lambda v}$$

Resta così dimostrato che: *supposte note le funzioni «fisse» $P_o \cdot S$ ed M , l'operatore $g(F) f(x)$ può calcolarsi con 8 integrazioni (calcoli di residuo) ed una derivazione.*

(Basta infatti osservare la (10,2) e ricordare che la γ si otteneva con 7 integrazioni ed una derivazione).

In modo più significativo si può dire che: *l'operatore $g(F) f(x)$ si ottiene calcolando la funzione g di un funzionale lineare «invariabile» dell'indicatrice w ed applicando poi al prodotto di detta funzione per la f , un altro funzionale lineare «invariabile».*

Anche ora (come già si è fatto per le (8,77) ed (8,74)) facciamo notare la stretta somiglianza esistente tra l'espressione simbolica $g(F) f(x)$ e la sua traduzione in calcolo effettivo realizzata dal secondo membro della (10,12).

Inoltre l'operatore $g(F) f(x)$ può considerarsi come un *funzionale non lineare dell'indicatrice simmetrica $w(x, \alpha)$* e la (10,12) mette in luce che la sua *non linearità* è data *soltanto* dalla funzione di $\bar{w}(\xi, r, t)$ (funzionale lineare di w) $g(u \bar{w}(\xi, r, t))$ alla quale viene poi applicato un funzionale lineare. Evidentemente detto funzionale diventa lineare quando $g(\lambda)$ è lineare, cioè del tipo $a + b\lambda$.

In un prossimo lavoro mostrerò che questa proprietà relativa alla non linearità di $g(F) f(x)$, si riscontra in tutti i funzionali analitici non lineari.