Collect. Math. **46**, 1–2 (1995), 1–9

Automorphismes de certains complétés du corps de Weyl quantique

J. Alev

Université de Reims, CNRS U.R.A. 1870,

Département de Mathématiques, B.P. 347, 51062 Reims Cedex

F. Dumas

Université Blaise Pascal (Clermont 2),

Département de Mathématiques, 63177 Aubière Cedex

Dédié à la mémoire de Paul Dubreil

Abstract

Let k be a field and σ the k-automorphism of $k((Y))$ defined by: $\sigma(Y) = qY$, with $q \in k^*$. The purpose of this article is the description of the group $\mathrm{Aut}_k(L_q)$ for the extension $L_q = k((Y))((X;\sigma))$ of the quantum Weyl skewfield $D_1^q = k(Y)(X;\sigma)$, when q is not a root of one. The motivations of the main theorem (theorem 2.7) are detailed in the first part of the paper, devoted to the two-dimensional quantum Cremona transformations. Its proof is based on a general result (theorem 2.3) concerning the continuity of automorphisms in Laurent series skewfields, which also holds in the classical case (remark 2.10).

I. Transformations de Cremona dans D_1^q

1.1. Le groupe de Cremona classique. Soit k un corps commutatif. Notons Cr_2 le groupe de Cremona de dimension 2, c'est-à-dire le groupe des k-automorphismes du corps de fractions rationnelles $k(X,Y)$. Le *groupe intégral de Cremona* est le sous-groupe GA_2 des k-automorphismes de l'anneau $k[X,Y]$, décrit par divers résultats classiques (*cf. références de* [1] *ou* [7]).

Pour toute matrice $\begin{bmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{bmatrix} \in GL_3(k)$, il existe $\theta \in Cr_2$ défini par:

$$\theta(X) = (\alpha X + \beta Y + \gamma)/(\alpha'' X + \beta'' Y + \gamma''); \ \theta(Y) = (\alpha' X + \beta' Y + \gamma')/(\alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'').$$

Les automorphismes de ce type (*transformations fractionnelles linéaires*) forment un sous-groupe A_1 de Cr_2 isomorphe à $PGL_3(k)$. Notons τ l'élément de A_1 défini par $\tau(X) = Y$ et $\tau(Y) = X$.

Par ailleurs, pour tous $\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \in GL_2(k)$ et $\begin{bmatrix} a(Y) & c(Y) \\ b(Y) & d(Y) \end{bmatrix} \in GL_2(k(Y))$, il existe $\theta \in Cr_2$ défini par:

$$\theta(X) = \big[a(Y)X + b(Y)\big]/\big[c(Y)X + d(Y)\big]\ ; \ \theta(Y) = \big(\alpha Y + \beta\big)/\big(\gamma Y + \delta\big)\,.$$

Les automorphismes de ce type forment un sous-groupe A_3 de Cr_2, produit semi-direct de $PGL_2(k)$ par $PGL_2(k(Y))$. Les éléments de A_3, appelés *automorphismes triangulaires,* préservent le plongement $k(Y) \subseteq k(X, Y) = k(Y)(X)$. Distinguons dans A_3 la *transformation quadratique standard* ω, défini par $\omega(X) = X^{-1}$ et $\omega(Y) = Y^{-1}$.

Le théorème de Noether-Castelnuovo (*cf.* [6] ou [7] § 3.5) établit que, pour k algébriquement clos, Cr_2 est engendré par A_1 et ω. Plus récemment V.A. Iskovskikh (*cf.* [4], [5]) a démontré que Cr_2 est engendré par A_3 et τ, ce qui, (comme cela est observé en [7] § 3.14), permet de retrouver comme conséquence le théorème précédent. Un résultat complémentaire de D. Wright décrit Cr_2 comme somme amalgamée de trois de ses sous-groupes (dont A_1 et A_3) suivant leurs intersections deux à deux (*cf.* [7] § 3.13).

1.2. Le corps de Weyl quantique D_1^q. Fixons k un corps commutatif et q un élément non-nul de k, *non racine de l'unité* dans k. Notons σ le k-automorphisme de l'anneau commutatif de polynômes $k[Y]$ défini par: $\sigma(Y) = qY$. Le plan quantique $k_q[X, Y]$ est l'extension de Ore $k[Y][X; \sigma]$, avec la relation de commutation $XY = qYX$. Son corps de fractions $k(Y)(X; \sigma)$ est le premier corps de Weyl quantique, noté $D_1^q(k)$, ou plus simplement D_1^q. Il intervient de façon déterminante dans l'étude de nombreuses algèbres quantiques.

En prolongeant naturellement σ en un automorphisme du corps commutatif de séries de Laurent $K = k((Y))$, on définit le corps gauche de séries de Laurent: $L_q = K((X; \sigma)) = k((Y))((X; \sigma))$, dont D_1^q est un sous-corps. Les centres de L_q et de D_1^q sont égaux à k.

1.3. Automorphismes de D_1^q. Pour toute matrice $s = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ et tout couple $(\alpha,\beta) \in (k^*)^2$, il existe $\psi \in \mathrm{Aut}_k(D_1^q)$ défini par: $\psi(X) = \alpha Y^b X^a$ et $\psi(Y) = \beta Y^d X^c$. Les automorphismes de ce type, analogues multiplicatifs des automorphismes linéaires, forment un sous-groupe H, produit semi-direct de $(k^*)^2$ par $SL(2,\mathbb{Z})$. Soit C le sous-groupe de H constitué des $\psi \in H$ pour lesquels la matrice s appartient au sous-groupe cyclique d'ordre 3 de $SL(2,\mathbb{Z})$ engendré par la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Soit G le sous-groupe de C, isomorphe à $(k^*)^2$, constitué des automorphismes ψ de la forme: $\psi(X) = \alpha X$ et $\psi(Y) = \beta Y$. D'après la proposition 1.1.4 de [1], G est ici l'analogue du groupe GA_2 de la situation classique, c'est-à-dire le groupe des k-automorphismes du plan quantique $k_q[X,Y]$. Distinguons dans H l'élément ρ défini par: $\rho(X) = Y^{-1}$ et $\rho(Y) = X$, dont le carré $\omega = \rho^2$ est la transformation quadratique standard: $\omega(X) = X^{-1}$ et $\omega(Y) = Y^{-1}$. Notons enfin que, suivant la proposition 1.6 de [2], H est précisément le groupe des prolongements à D_1^q des automorphismes de la sous-algèbre de Mc Connell et Pettit $k_q[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$ de D_1^q.

Pour tout $\alpha \in k^*$ et tout $f = f(Y) \in k(Y), f \neq 0$, il existe $\mu \in \mathrm{Aut}_k(D_1^q)$ défini par $\mu(Y) = \alpha Y$ et $\mu(X) = f(Y)X$. Les automorphismes de ce type forment un sous-groupe B^+ de $\mathrm{Aut}_k(D_1^q)$, produit semi-direct de k^* par $k(Y)^*$. Notons B le produit semi-direct de B^+ par l'involution ω. Les deux propositions suivantes montrent que B et C sont les analogues quantiques respectifs des sous-groupes A_3 et A_1 de Cr_2.

Proposition 1.4

B est égal au sous-groupe des $\theta \in \mathrm{Aut}_k(D_1^q)$ tels que la restriction de θ au sous-corps commutatif $k(Y)$ soit un automorphisme de $k(Y)$.

Preuve. Soit $\theta \in \mathrm{Aut}_k(D_1^q)$ tel que θ se restreigne en un automorphisme de $k(Y)$; d'après le théorème de Lüroth, $\theta(Y)$ est de la forme $(\alpha Y+\beta)/(\gamma Y+\delta)$ avec $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ dans k tels que $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$. Par ailleurs, $\theta(X)$ se développe dans l'extension intermédiaire $L'_q = k(Y)((X;\sigma)) \subseteq L_q$ de D_1^q sous la forme d'une série de Laurent $\sum_{n\geq m} f_n(Y)X^n$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et $f_n \in k(Y)$ pour tout $n \geq m$. La relation de commutation $\theta(X)\theta(Y) = q\theta(Y)\theta(X)$ implique: $\sigma^n(\theta(Y)) = q\theta(Y)$ pour tout n appartenant au support $M = \{n \geq m,\ f_n \neq 0\}$. On a donc, pour tout $n \in M$:

$$q^n\alpha\gamma Y^2 + \big(q^n\alpha\delta + \beta\gamma\big)Y + \beta\delta = q^{n+1}\alpha\gamma Y^2 + q\big(q^n\beta\gamma + \alpha\delta\big)Y + q\beta\delta\,.$$

Si $\beta = 0$, on en déduit, puisque $\alpha\delta \neq 0$ et q non racine de l'unité, que $M = \{1\}$ et $\gamma = 0$; donc $\theta(X) = f_1(Y)X$ et $\theta(Y) = \alpha\delta^{-1}Y$, ce qui prouve que $\theta \in B^+$.

Sinon, $\delta = 0$, $M = \{-1\}$ et $\alpha = 0$. On conclut que $\theta(X) = f_{-1}(Y)X^{-1}$ et $\theta(Y) = \beta\gamma^{-1}Y^{-1}$, c'est-à-dire: $\omega\theta \in B^+$. $\square$

Proposition 1.5

C est égal au sous-groupe des $\theta \in \mathrm{Aut}_k(D_1^q)$ tels que $\theta(X)$ et $\theta(Y)$ soient de la forme: $\theta(X) = UW^{-1}$ et $\theta(Y) = VW^{-1}$, avec U, V, W non nuls de degré total inférieur ou égal à 1 dans $k_q[X, Y]$.

Preuve. Soit $\theta \in \mathrm{Aut}_k(D_1^q)$ tel que: $\theta(X) = UW^{-1}$ et $\theta(Y) = VW^{-1}$, avec $U = \alpha X + \beta Y + \gamma$, $V = \alpha' X + \beta' Y + \gamma'$, $W = \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma''$. On a: $UW^{-1}V = qVW^{-1}U$. En développant W^{-1} en série dans L_q et en identifiant les deux membres de cette égalité, on vérifie (par des calculs techniques non reproduits ici) que trois cas seulement sont possibles:

(1) $\theta(X) = \alpha(\gamma'')^{-1}X$ et $\theta(Y) = \beta'(\gamma'')^{-1}Y$;
(2) $\theta(X) = \gamma(\beta'')^{-1}Y^{-1}$ et $\theta(Y) = \alpha'(\beta'')^{-1}XY^{-1}$;
(3) $\theta(X) = \beta(\alpha'')^{-1}YX^{-1}$ et $\theta(Y) = \gamma'(\alpha'')^{-1}X^{-1}$.

On conclut que $\theta \in C$. $\square$

Remarque 1.6. Le groupe $SL(2, \mathbb{Z})$ étant engendré par le sous-groupe des matrices $\begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ où $c \in \mathbb{Z}$, et l'élément $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, il est clair que H est engendré par $H \cap B$ et ρ. Plus généralement, le problème se pose d'un analogue du théorème d'Iskovskikh permettant de décrire $\mathrm{Aut}_k(D_1^q)$ comme engendré par B et ρ (modulo le sous-groupe normal des automorphismes intérieurs). Cette question est, à notre connaissance, encore sans réponse; mais, pour l'extension locale L_q de D_1^q, on établit au théorème 2.7 de la partie suivante que tout k-automorphisme de L_q est le produit d'un automorphisme triangulaire (au sens défine en 2.5) par un automorphisme intérieur. La preuve repose sur un théorème général de continuité des automorphismes des corps gauches de séries de Laurent, démontré en 2.3.

II. Groupe des automorphismes de L_q

Notations 2.1 Soient K un corps commutatif et σ un automorphisme de K. On note A l'anneau de séries formelles tordues $K[[X; \sigma]]$, dans lequel le produit est défini à partir de la loi de commutation:

$$(*) \qquad Xa = \sigma(a)X \qquad \text{pour tout} \qquad a \in K\,,$$

et $L = K((X;\sigma))$ son corps de fractions. Les éléments de L sont les séries de Laurent $T = \sum_{i\geq m} a_i X^i$, avec $m \in \mathbb{Z}$ et $a_i \in K$ pour tout entier $i \geq m$. Si $a_m \neq 0$, on pose $v_X(T) = m$, de sorte que A est l'anneau $\{T \in L; v_X(T) \geq 0\}$ de la valuation discrète v_X de L. Le groupe des unités de A est $U(A) = \{T \in A\,;\ v_X(T) = 0\}$.

Lemme 2.2

Soient K un corps commutatif, σ un automorphisme de K, et A l'anneau $K[[X;\sigma]]$. Soit p un nombre premier distinct de la caractéristique de K. Alors, tout élément de A de la forme $1 + \sum_{i\geq 1} a_i X^i$ admet une racine p-ième dans A.

Preuve. Pour tout $R = \sum_{i\geq 0} b_i X^i \in A$, notons $R^p = \sum_{i\geq 0} b_{p,i} X^i$ avec b_i et $b_{p,i}$ dans K. On vérifie à partir de $(*)$ que $b_{p,i} = \big[\sum_{0\leq j\leq p-1} b_0^{p-1-j}\sigma^i(b_0^j)\big] b_i + B_i$, où le reste B_i ne dépend que de $b_{i-1}, b_{i-2}, \ldots, b_0$ (et de leurs images par σ). Pour toute suite $(a_i)_{i\geq 1}$ d'éléments de K, on peut donc déterminer de proche en proche une suite $(b_i)_{i\geq 0}$ avec $b_0 = 1$, telle que $b_{p,i} = a_i$ pour tout $i \geq 1$, c'est-à-dire: $\big(\sum_{i\geq 0} b_i X^i\big)^p = 1 + \sum_{i\geq 1} a_i X^i$. $\square$

Théorème 2.3

Soient K un corps commutatif, σ un automorphisme de K, et L le corps gauche $K((X;\sigma))$. Soit θ un automorphisme de L. Alors:

$$v_X\big(\theta(T)\big) = v_X(T) \quad \textit{pour tout} \quad T \in L\,.$$

En particulier, la restriction à A de θ est un automorphisme de A.

Preuve. Fixons θ un automorphisme de L. Montrons d'abord que:

$$(1) \qquad \text{pour tout} \quad a \in K^*, \text{ on } \quad a : v_X\big[\theta(aX)\big] \geq 0\,.$$

En effet, on aurait sinon $\theta\big(1+X^{-1}a^{-1}\big) = 1+\theta\big(X^{-1}a^{-1}\big)$ avec $v_X\big[\theta(X^{-1}a^{-1})\big] > 0$. Soit p un nombre premier distinct de la caractéristique de K. D'après le lemme 2.2, il existe $R \in A$ tel que $\theta(1 + X^{-1}a^{-1}) = R^p$, d'où: $-1 = v_X[1 + X^{-1}a^{-1}] = v_X[\theta^{-1}(R^p)] = v_X[\theta^{-1}(R)^p] \equiv 0$ modulo p, et la contradiction.

Soit $s = v_X[\theta(X)]$, qui appartient à $\mathbb{N}$ d'après (1). Pour tout $a \in K^*$, on a: $v_X[\theta(X)] + v_X[\theta(a)] \geq 0$, c'est-à-dire: $v_X[\theta(a)] \geq -s$. S'il existait $a_0 \in K^*$ tel que $v_X[\theta(a_0)] = -m$ avec $m > 0$, on aurait $m \leq s$. Pour $a = a_0^{s+1}$, on obtiendrait: $-s \leq v_X\big[\theta(a_0^{s+1})\big] = -m(s+1)$, ce qui est impossible avec $s \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On a ainsi montré que $v_X[\theta(a)] \geq 0$ pour tout $a \in K^*$ et, par passage à l'inverse a^{-1}:

$$(2) \qquad \text{pour tout} \quad a \in K^*, \quad \text{on a:} \quad v_X[\theta(a)] = 0\,.$$

Tout élément T du groupe des unités $U(A)$ de A s'écrit $T = a(1+W)$, avec $a \in K^*$ et $v_X(W) \geq 1$. Suivant le lemme 2.2, pout tout nombre premier p distinct de la caractéristique de K, il existe $R \in A$ tel que $a^{-1}T = R^p$; donc, d'après (2): $v_X[\theta(T)] = v_X[\theta(a^{-1}T)] = v_X[\theta(R)^p] \equiv 0$ modulo p. On conclut:

$$\text{(3)} \qquad \text{pour tout} \quad T \in U(A), \quad \text{on a:} \quad \theta(T) \in U(A)\,.$$

En rappelant que $s = v_X[\theta(X)] \in \mathbb{N}$, on peut écrire: $\theta(X) = TX^s$ avex $T \in U(A)$, et donc $X = \theta^{-1}(T)[\theta^{-1}(X)]^s$. En utilisant (3) pour θ^{-1}, on obtient: $v_X[\theta^{-1}(T)] = 0$ et $1 = sv_X[\theta^{-1}(X)]$. On déduit que $s = 1$, ce qui achève la preuve. □

Remarque 2.4. Outre le lemme 2.2, dans lequel intervient la définition du produit dans L à partir de la relation $(*)$, la preuve ci-dessus ne repose que sur les propriétés de la valuation discrète v_X sur L. Le même problème peut donc être posé dans le contexte plus général où A est un anneau de séries entières formelles $A = K\big[[X;\sigma,S]\big]$ et $L = K\big((X;\sigma,S)\big)$ son corps de fractions, pour lesquels le produit est défini à partir d'une loi de commutation de la forme:

$$(**) \qquad Xa = \sigma(a)X + \sum_{i\geq 1} \delta_i(a)X^{i+1} \quad \text{pour tout} \quad a \in K,$$

avec σ un automorphisme de K et $S = (\delta_i)_{i\geq 1}$ une haute σ-dérivation de K (*cf.* [3] *et sa bibliographie*). Dans le cas où $\delta_i = 0$ pour tout $i \geq 1$, la relation $(**)$ se réduit à $Xa = \sigma(a)X$ et l'on retrouve la situation des séries tordues décrite en 2.1. Un autre exemple classique est celui des corps d'opérateurs pseudo-différentiels formels $L = K((X;\delta))$ correspondant au cas où: $\sigma = id_k$ et $\delta_i = \delta^i$, avec δ une dérivation de K.

Bien que les calculs avec la relation générale $(**)$ soient bien sûr plus complexes que dans le cas particulier $(*)$, on peut reprendre sans changement la preuve du lemme 2.2. On en déduit que: *le théorème 2.3 reste vrai pour L un corps de séries de Laurent quelconque $K\big((X;\sigma,S)\big)$, avec σ un automorphisme et S une haute σ-dérivation de K.*

Notations 2.5 Reprenons maintenant les notations de 1.2: q est un élément fixé du corps commutatif k, non-nul et *non racine de l'unité*, K est le corps commutatif $k((Y)), \sigma$ est le k-automorphisme de K défini par $\sigma(Y) = qY$, et $L_q = K((X;\sigma)) = k((Y))((X;\sigma))$. On introduit d'abord l'analogue pour L_q du groupe des automorphismes triangulaires.

Pour tout $\alpha \in k^*$, on désigne par w_α le k-automorphisme de K défini par $w_\alpha(Y) = \alpha Y$. Soit w le plongement du groupe k^* dans le groupe des automorphismes du groupe K^* défini par $w(\alpha) = w_\alpha$. On note $k^* \underset{w}{\times} K^*$ le produit semi-direct correspondant. Pour tous $\alpha \in k^*$ et $f(Y) \in K^*$, on définit $\theta_{\alpha,f} \in \mathrm{Aut}_k(L_q)$ par:

$$\theta_{\alpha,f}(Y) = \alpha Y \quad \text{et} \quad \theta_{\alpha,f}(X) = f(Y)X\,.$$

On considère dans $\mathrm{Aut}_k(L_q)$ le sous-groupe:

$$S = \big\{\theta_{\alpha,f}\,;\ \alpha \in k^*,\ f(Y) \in K^*\big\} \simeq k^* \underset{w}{\times} K^*\,.$$

Le lemme suivant caractérise les automorphismes intérieurs de L_q.

Lemme 2.6

Pour tout $\theta \in \mathrm{Aut}_k(L_q)$, il existe $\beta \in k^*$, et deux suites $(a_i)_{i\geq 1}$ et $(b_i)_{i\geq 1}$ d'éléments de K, avec $a_1 \neq 0$, tels que:

$$\theta(X) = \sum_{i\geq 1} a_i X^i \quad \textit{et} \quad \theta(Y) = \beta Y + \sum_{i\geq 1} b_i X^i\,.$$

De plus, $\theta \in \mathrm{Int}(L_q)$ si et seulement s'il vérifie les deux conditions suivantes:

(i) β appartient au sous-groupe monogène $\langle q\rangle$ de k^*;

(ii) il existe $u \in K^*$ tel que $a_1\sigma(u) = u$.

Preuve. D'après le théorème 2.3, il existe $(a_i)_{i\geq 1}$ et $(b_i)_{i\geq 0}$ dans K tels que: $\theta(X) = \sum_{i\geq 1} a_i X^i$ et $\theta(Y) = \sum_{i\geq 0} b_i X^i$, avec a_1 et b_0 non-nuls. La relation de commutation $\theta(X)\theta(Y) = q\theta(Y)\theta(X)$ implique $\sigma(b_0) = qb_0$. Développons b_0 dans K en: $b_0 = \sum_{i\geq n} \beta_i Y^i$, avec $n \in \mathbb{Z},\ \beta_i \in k,\ \beta_n \neq 0$. Comme q est supposé non racine de l'unité, le seul indice i du support de b_0 est 1, d'où $b_0 = \beta Y$ en posant $\beta = \beta_1$.

De plus, $\theta \in \mathrm{Int}(L_q)$ si et seulement s'il existe $U = \sum_{i\geq m} u_i X^i \in L_q$, avec $m \in \mathbb{Z},\ u_i \in K,\ u_m \neq 0$, tel que $UY = \theta(Y)U$ et $UX = \theta(X)U$. Par identification dans $L_q = K((X;\sigma))$, la première égalité équivant à $\beta = q^m$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{m+n}Y\big(q^{m+n} - \beta\big) = \sum_{1\leq i\leq n} b_i \sigma^i(u_{m+n-i})\,.$$

La seconde égalité implique en particulier que: $a_1\sigma(u_m) = u_m$. Les conditions (i) et (ii) du lemme sont donc nécessaires. Supposons réciproquement que θ vérifie les hypothéses (i) et (ii); soit $u \in K^*$ solution de $a_1\sigma(u) = u$, et soit m l'unique entier tel que $\beta = q^m$. On définit une suite $(u_{m+n})_{n\geq 0}$ d'éléments de K par: $u_m = u$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{m+n} = \big(q^{m+n} - \beta\big)^{-1} Y^{-1} \sum_{1\leq i\leq n} b_i \sigma^i\big(u_{m+n-i}\big)\,.$$

Par construction, l'élément $U = \sum_{i \geq m} u_i X_i$ ainsi déterminé vérifie: $\theta(Y) = UYU^{-1}$ et

$$UXU^{-1} = \big[u_m X^{m+1} + \dots\big]\big[\sigma^{-m}(u_m^{-1})X^{-m} + \dots\big] = u_m \sigma(u_m^{-1})X + \dots = a_1 X + \dots$$

Posons $\Delta = \theta(X) - UXU^{-1}$ et $s = v_X(\Delta)$, de sorte que $s \geq 2$. Calculons:

$$\theta(Y)^{-1}\Delta\theta(Y) = \theta\big(Y^{-1}XY\big) - UY^{-1}U^{-1}UXU^{-1}UYU^{-1} = q\Delta\,.$$

Si Δ n'était pas nul, on aurait dans L_q un développement $\Delta = \sum_{i \geq s} d_i X^i$, où $d_i \in K$ et $d_s \neq 0$. Donc: $(d_s X^s + \dots)(\beta Y + b_1 X + \dots) = q(\beta Y + b_1 X + \dots)(d_s X^s + \dots)$. En valuation s, il vient: $d_s \beta q^s Y = q\beta Y d_s$, ce qui est absurde. On conclut que Δ est nul, ce qui prouve que θ est intérieur. $\square$

Théorème 2.7

On a : $\mathrm{Aut}_k(L_q)/\mathrm{Int}(L_q) \simeq S/\big(\mathrm{Int}(L_q) \cap S\big)$.

Preuve. Soit $\theta \in \mathrm{Aut}_k(L_q)$; reprenons les notations du lemme 2.6 et posons $\alpha = \beta^{-1}$. Soit alors $\phi \in S$ défini par $\phi(Y) = \alpha Y$ et $\phi(X) = w_\alpha(a_1^{-1})X$, de sorte que: $\phi\theta(Y) = Y + b'_1 X + b'_2 X^2 + \dots$ et $\phi\theta(X) = X + a'_2 X^2 + \dots$, avec les a'_i et b'_j dans K. Les conditions (i) et (ii) du lemme 2.6 étant vérifiées, on conclut que $\phi\theta$ est intérieur. Ainsi, $\mathrm{Aut}_k(L_q) = \mathrm{Int}(L_q)S$, ce qui achève la preuve. $\square$

Proposition 2.8

En désignant par ρ la projection canonique de l'anneau $k[[Y]]$ sur k, on a: $\mathrm{Int}(L_q) \cap S \simeq \langle q \rangle \underset{w}{\times} \rho^{-1}(\langle q \rangle)$.

Preuve. On fixe $(\beta, f) \in k^* \times K^*$ et $\theta = \theta_{\beta,f} \in S$. La condition (ii) du lemme 2.6 (avec ici $a_1 = f$) implique que la valuation en Y de f est nulle. On note: $f = \sum_{i \geq 0} \alpha_i Y^i$, avec $\alpha_i \in k$ et $\rho(f) = \alpha_0 \neq 0$, de sorte que (ii) équivaut à l'existence d'un entier $m \in \mathbb{Z}$ et d'une suite $(\gamma_i)_{i \geq 0}$ d'éléments de k tels que: $\gamma_0 \neq 0$ et $\big(\sum_{i \geq 0} \alpha_i Y^i\big)\big(\sum_{i \geq 0} q^{m+i}\gamma_i Y^{m+i}\big) = \sum_{i \geq 0} \gamma_i Y^{m+i}$. On déduit que $\alpha_0 \in \langle q \rangle$ dès lors que θ est intérieur. Supposons réciproquement que $\alpha_0 = q^{-m}$, avec $m \in \mathbb{Z}$. Posons $\gamma_0 = 1$ et définissons une suite $(\gamma_i)_{i \geq 0}$ d'éléments de k par:

$$\gamma_{n+1} = \big(1 - q^{n+1}\big)^{-1} \sum_{1 \leq i \leq n} q^{m+i}\gamma_i \alpha_{n+1-i} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

L'élément $u = \sum_{i \geq 0} \gamma_i Y^{m+i}$ de K vérifie alors: $f\sigma(u) = u$. En résumé, $\theta \in \mathrm{Int}(L_q)$ si et seulement si $\beta \in \langle q \rangle$ et $f \in k[[Y]]$ tel que $\rho(f) = \alpha_0 \in \langle q \rangle$. $\square$

Corollaire 2.9

On a: $\mathrm{Aut}_k(L_q)/\mathrm{Int}(L_q) \simeq \big(k^*/\langle q \rangle\big) \underset{w}{\times} \big(k^*/\langle q \rangle \times \mathbb{Z}\big)$.

Remarque 2.10 Soit k un corps commutatif de caractéristique nulle. Le corps de Weyl classique $D_1(k)$ est le corps de fractions $k(Y)(X;\sigma)$ de l'extension de Ore $k[Y][X;\sigma]$, avec σ le k-automorphisme de $k[Y]$ défini par $\sigma(Y) = Y - 1$. On pose: $K = k((Y^{-1})) \supseteq k(Y^{-1}) = k(Y)$, et on définit l'extension $L = k((Y^{-1}))((X;\sigma))$ de D_1, où σ et prolongé en un automorphisme de K par: $\sigma(Y^{-1}) = (Y-1)^{-1} = \sum_{i\geq 1} Y^{-i}$. Le centre de L et D_1 est k. Pour $\alpha \in k$ et $f(Y) \in K^*$, on note $\theta_{\alpha,f}$ l'élément de $\mathrm{Aut}_k(L)$ défini par: $\theta_{\alpha,f}(Y) = Y - \alpha$ et $\theta_{\alpha,f}(X) = f(Y)X$. Le sous-groupe $G = \{\theta_{\alpha,f}\,;\, \alpha \in k,\ f(Y) \in K^*\}$ de $\mathrm{Aut}_k(L)$ est isomorphe à un produit semi-direct du groupe additif k par K^*, et l'on peut montrer en adaptant les raisonnements faits ci-dessus pour D_1^q que:

$$\mathrm{Aut}_k(L)/\mathrm{Int}(L) \simeq G/(\mathrm{Int}(L)\cap G) \simeq (k/\mathbb{Z}) \times (k^* \times \mathbb{Z} \times k/\mathbb{Z})\,.$$

Remerciements. Nous tenons à remercier J.P. Bézivin pour une discussion au sujet du théorème 2.3.

Références

1. J. Alev et M. Chamarie, Dérivations et automorphismes de certaines algèbres quantiques, *Commun. Algebra* **20** (1992), 1787–1802.
2. J. Alev et F. Dumas, Rigidité des plongements des quotients primitifs minimaux de $U_q(sl(2))$ dans l'algèbre quantique de Weyl-Hayashi, Preprint Université de Reims n° 94.7, 1994.
3. F. Dumas, Sous-corps de fractions rationnelles des corps gauches de séries de Laurent, in "Séminaire d'Algèbre P. Dubreil et M.-P. Malliavin, 1989–1990", *Lecture Notes in Maths* **1478** (1992), 192–214.
4. V.A. Iskovskikh, Generators and relations in the two-dimensional Cremona group, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.* **38** (1983), n° 5, 43–48.
5. V.A. Iskovskikh, Proof of a theorem on relations in the two-dimensional Cremona group, *Uspekhi Mat. Nauk.* **40** (1985), n° 5, 255–256.
6. M. Nagata, On rational surfaces I, *Mem. College Sci. Kyoto Univ.* **32** (1960).
7. D. Wright, Two-dimensional Cremona groups acting on simplicial complexes, *Trans. Amer. Math. Soc.* **331** (1992), 281–300.