Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 23, núm. 2, 2008. Pàg. 221–232. DOI: 10.2436/20.2002.01.16

Cancel·lació i automillora

Artur Nicolau

Resum Aquest article presenta dos problemes d'anàlisi clàssica: el creixement dels quocients incrementals de les funcions de Weierstrass i la regularitat de les mesures de Besicovitch. Aquests problemes s'estudien utilitzant tècniques de martingales diàdiques i s'obtenen diverses versions de la llei del logaritme iterat.

Paraules clau: martingales diàdiques, llei del logaritme iterat.

Classificació MSC2000: 60G46, 28A78, 28D20.

1 Introducció

En moltes àrees de les matemàtiques s'estudien quantitats que evolucionen de manera que les seves variacions es compensen, és a dir, que es produeix una certa cancel·lació. Aleshores és habitual que, a llarg termini, aquestes quantitats prenguin valors notablement inferiors als seus valors màxims teòrics. Durant el segle XX, diversos autors han situat problemes importants en teoria geomètrica de funcions en aquest context. En aquesta àrea, moltes qüestions poden ser reduïdes a contexts discrets on les propietats de cancel·lació són més transparents i permeten obtenir millores sensibles de les estimacions òbvies. Aquest va ser el punt de vista que N. Makarov va adoptar a final dels anys vuitanta quan, en una sèrie de treballs profunds i influents, va resoldre diversos problemes importants sobre el comportament de la mesura harmònica a dominis plans ([12]). N. Makarov va traduir aquestes qüestions importants d'anàlisi clàssica a problemes sobre el comportament asimptòtic de certs tipus de martingales discretes. Des de llavors aquest punt de vista ha resultat molt fructífer. La intenció d'aquest article no és fer una presentació exhaustiva de resultats, sinó mostrar les idees i mètodes de l'àrea en dues situacions elementals.

Aquest paràgraf està dedicat a explicar l'organització d'aquest article. A les dues properes seccions es presenten els dos exemples clàssics i elementals. Es tracta de l'estudi del creixement dels quocients incrementals de les funcions contínues que no són derivables enlloc que va construir K. Weierstrass i de la mesura de A. Besicovitch associada al desenvolupament en base dos. Les seccions 4 i 5 es dediquen al passeig aleatori i a les martingales diàdiques. La darrera secció presenta la interacció entre la teoria de martingales i els dos exemples clàssics de les primeres seccions.

2 Funcions contínues no derivables

Una funció $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és contínua al punt $x_0 \in \mathbb{R}$ si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

La funció f és derivable al punt x_0 si existeix el límit dels quocients incrementals, és a dir, si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existeix. Tots sabem que una funció derivable és forçosament contínua, però l'enunciat recíproc no és cert. Per veure-ho, únicament cal dibuixar una gràfica contínua sense recta tangent a un punt, com ara la gràfica de $f(x) = |x - x_0|$. La construcció d'una funció contínua que no sigui derivable a cap punt no és tan simple. L'any 1872, K. Weierstrass va presentar a l'Acadèmia de Ciències de Berlín una funció amb aquestes propietats. Concretament, si λ i μ són paràmetres que compleixen $0 < \lambda < 1$ i $\mu \geq \lambda^{-1}$, llavors K. Weierstrass va provar que la funció

$$f_{\lambda,\mu}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \cos(\mu^n x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

és contínua a tots els punts però no és derivable enlloc. La condició $0 < \lambda < 1$ assegura la convergència uniforme de la sèrie i, per tant, la continuïtat de $f_{\lambda,\mu}$. El fet que $f_{\lambda,\mu}$ no és derivable a cap punt és més delicat i va ser provat per K. Weierstrass sota la hipòtesi més restrictiva $\mu \geq \lambda^{-1}\ (1 + \pi/2)$. Quaranta anys més tard, G. Hardy va demostrar la no-derivabilitat en tot punt sota la hipòtesi òptima $\mu \geq \lambda^{-1}$ ([6]). Convé assenyalar que abans de K. Weierstrass, B. Bolzano havia descobert exemples semblants, però el seu treball no va tenir difusió. Segons K. Weierstrass, B. Riemann també es va interessar en aquest tipus d'exemples i va suggerir que la funció

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n^2 x)}{n^2}$$

podia ser un exemple de funció contínua no derivable a cap punt. G. Hardy va confirmar parcialment la sospita de B. Riemann quan va provar que $g(x)$ no és derivable a cap punt irracional ni tampoc a certs racionals ([6]). L'any 1970, és a dir, cent anys després del suggeriment de B. Riemann, J. Gerrer va trobar punts racionals on $g(x)$ és derivable. De fet, resulta que $g(x)$ és derivable exactament als punts x de la forma $x = a/q$ on a, q són enters coprimers i $q - 2$ és un múltiple de 4. Vegeu [4] i [5].

Les funcions $f_{\lambda,\mu}$ de K. Weierstrass i posteriors exemples de funcions patològiques van tenir un fort impacte en la comunitat matemàtica de l'època. Probablement van tenir un paper important en l'establiment de les definicions correctes i de les bases sòlides de l'anàlisi. No obstant això, convé assenyalar que aquestes funcions patològiques van generar polèmica entre els matemàtics de l'època, com mostra la citació següent:

> En els darrers anys hem estat observant una massa de funcions estranyes, creades per assemblar-se el mínim possible a les funcions honestes que serveixen per a alguna cosa [...]. Abans les funcions s'inventaven amb algun propòsit. Avui dia, les funcions s'inventen per mostrar els errors en els raonaments dels nostres pares [...]
>
> [H. Poincaré, *L'Enseignement Mathématique*, 1899]

Centrem la nostra discussió en el cas extrem $\mu = \lambda^{-1}$, on $0 < \lambda < 1$, i en la funció

$$f(x) = f_\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \cos(\lambda^{-n} x).$$

A la figura 1 es reprodueix la gràfica de la suma parcial fins al terme 14 amb paràmetre $\lambda = 1/2$.

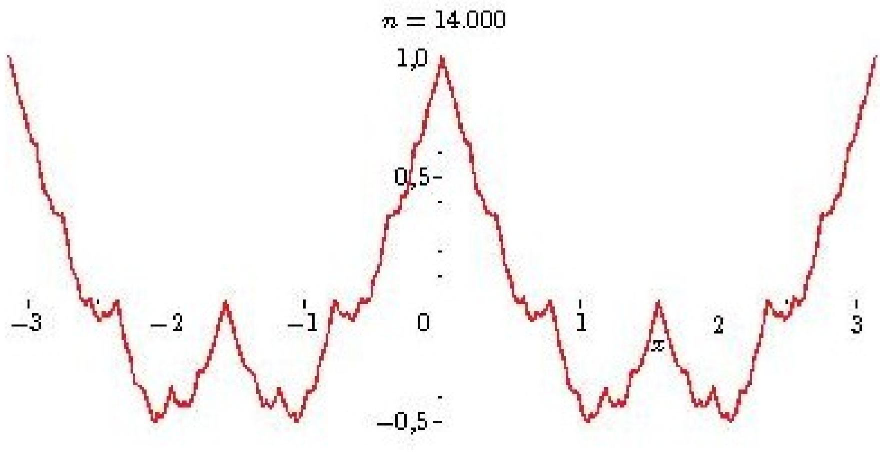

FIGURA 1

Com ja hem indicat, $f(x)$ no és derivable a cap punt. De fet, a gairebé tot punt $x \in \mathbb{R}$ es compleix que

$$\limsup_{h\to 0} |\Delta f(x,h)| = \infty$$

on

$$\Delta f(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

denota el quocient incremental a escala h al punt x. Per tant, és molt natural preguntar-se pel creixement de $|\Delta f(x,h)|$. Es pot comprovar que existeix una constant $C > 0$ de manera que

$$|\Delta f(x,2h) - \Delta f(x,h)| \leq C$$

per tot $x, h \in \mathbb{R}$. Utilitzant aquesta desigualtat $\log_2 1/|h|$ vegades, fins a arribar a escala 1, s'obté la següent

Estimació òbvia $|\Delta f(x,h)| \leq C \log 1/|h|$, per tot $x \in \mathbb{R}$, $|h| < 1/2$.

A més, aquesta desigualtat puntual és immillorable, en el sentit que hi ha punts $x \in \mathbb{R}$ i escales h arbitràriament petites per a les quals $|\Delta f(x,h)| \geq \tilde{C} \log 1/|h|$ on $\tilde{C}$ és una altra constant absoluta. No obstant això, com veurem més endavant, els quocients incrementals tenen una certa propietat de cancel·lació, que permet obtenir millors estimacions a gairebé tot punt. De fet, resulta que a gairebé tot punt $x \in \mathbb{R}$ es té que

$$0 < \limsup_{|h|\to 0} \frac{|\Delta f(x,h)|}{\sqrt{\log 1/|h| \log\log\log 1/|h|}} < \infty. \tag{1}$$

Per tant, a gairebé tot punt $x \in \mathbb{R}$, el creixement de $|\Delta f(x,h)|$ no és logarítmic com indica l'estimació òbvia, sinó exactament com

$$\sqrt{\log 1/|h| \log\log\log 1/|h|}.$$

Discutirem aquest fet amb més detall a la secció 6.

Convé mencionar que el conjunt E on els quocients incrementals es mantenen acotats

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} : \limsup_{|h|\to 0} |\Delta f(x,h)| < \infty \right\}$$

és de longitud zero, però és encara un conjunt gran en el sentit que la dimensió de Hausdorff de E és 1.

3 Freqüència dels dígits en desenvolupaments binaris

Sigui $I = [0,1)$ l'interval unitat que dividim en dos parts $[0,1/2)$ i $[1/2,1)$. De manera inductiva quan tenim un interval I el dividim en dos intervals disjunts d'igual longitud que anomenarem I_+ i I_-. Per tant, després de n etapes, es té la família $\mathcal{D}(n)$ dels 2^n intervals diàdics de generació n que són $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$, $k = 0, \dots, 2^n - 1$. Així, doncs, cada interval de $\mathcal{D}(n)$ està contingut en un únic interval de $\mathcal{D}(n-1)$ i és la unió de dos intervals de $\mathcal{D}(n+1)$. Denominarem $I_n(x)$ l'interval diàdic de generació n que conté el punt x. La descomposició en intervals diàdics és equivalent al desenvolupament d'un nombre $x \in [0,1)$ en base 2 que denotem per $x_1 x_2 \dots x_n \dots$ De fet, si $x \in J \in \mathcal{D}(n-1)$, llavors $x_n = 0$ si x està a la meitat esquerra de J i $x_n = 1$ en cas contrari.

És molt natural preguntar-se per la freqüència amb què el dígit 0 (o equivalentment el dígit 1) apareix en els desenvolupaments binaris. Resulta que, a gairebé tot punt $x \in [0,1)$, la freqüència dels dígits 0 o 1 és la mateixa (i, per tant, igual a 1/2), és a dir,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{k \in [1,n] : x_k = 0\} = \frac{1}{2} \quad \text{g.p.t. } x \in \mathbb{R}.$$

Siguem ara una mica recalcitrants i donat $0 \le p \le 1$ considerem el conjunt $E(p)$ de punts $x \in [0,1)$ per als quals el dígit 0 apareix amb freqüència p, és a dir,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{k \in [1,n] : x_k = 0\} = p.$$

Si $p \neq 1/2$, el conjunt $E(p)$ té longitud zero però té encara una mida notable.

1 Teorema (A. Besicovitch, 1935) *La dimensió de Hausdorff de $E(p)$ és*

$$h(p) = p \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \log_2 \frac{1}{1-p}.$$

De fet, A. Besicovitch va provar un resultat més general en el qual considerava la freqüència d'una sèrie prefixada de dígits. El problema anàleg per a desenvolupaments en altres bases va ser tractat a [3].

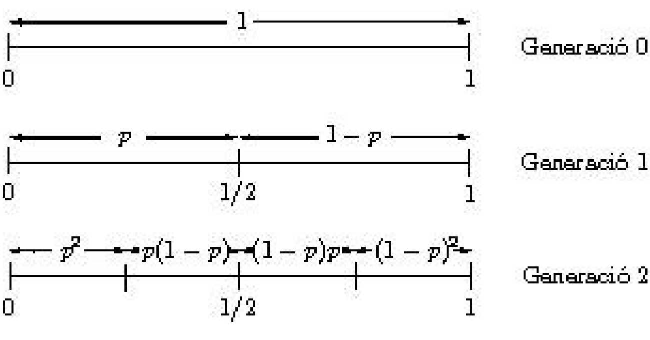

Figura 2

La prova del teorema d'A. Besicovitch es basa en construir una mesura de probabilitat μ suportada en el conjunt $E(p)$ amb un cert creixement. Per definir la mesura és suficient especificar la seva massa als intervals diàdics. Podem suposar que $p > 1/2$. Prenem $\mu[0,1) = 1$ i suposem inductivament que $\mu(I)$ ha estat definit on I és un interval diàdic de generació n. Siguin I_-, I_+ les meitats esquerra i dreta de I. Definim $\mu(I_-) = p\mu(I)$ i $\mu(I_+) = (1-p)\mu(I)$. D'aquesta manera, privilegiem la meitat esquerra que correspon als punts que, desenvolupats en base 2, tenen el dígit que ocupa el lloc $n+1$ igual a 0. Vegeu la figura 2.

Així, entre els intervals de generació n-èsima, l'extrem esquerre $[0, 2^{-n})$ és el que té massa màxima, concretament, p^n. D'aquesta manera es té:

Estimació òbvia $\mu(I_n(x)) \leq p^n$, $x \in [0,1)$.

Aquesta estimació és immillorable, ja que $\mu[0, 2^{-n}) = p^n$. No obstant això, la situació presenta certes propietats de cancel·lació que permeten obtenir estimacions millors a gairebé tot punt. Més concretament, resulta que per *μ-gairebé per tot x* es té que

$$\mu(I_n(x)) \leq |I_n(x)|^{h(p)(1+o(1))}, \tag{2}$$

si $n \geq n_0(x)$. Aquesta és l'estimació que permet provar el teorema de Besicovitch i es dedueix, per exemple, del teorema ergòdic quan s'observa que l'operador *shift* al desenvolupament en base dos és ergòdic respecte a la mesura μ. L'estimació anterior pot encara refinar-se i es pot provar que μ-g.p.t. $x \in [0,1)$ es té que

$$\mu(I_n(x)) \leq |I_n(x)|^{h(p)(1+o(1)\sqrt{\log\log n/n})} \tag{3}$$

si $n \geq n_0(x)$. Això dóna lloc a refinaments del teorema de Besicovitch, en què la dimensió és reemplaçada per la mesura de Hausdorff Λ_φ associada a la funció

$$\varphi(t) = t^{h(p)} \exp(c\sqrt{\log 1/t \log\log\log 1/t}).$$

Veurem aquests fets amb més detall a la secció 6.

4 Passeig aleatori

Considerem el joc de tirar una moneda i guanyar 1 € si surt cara, o bé perdre 1 € si surt creu. Considerem S_n el guany acumulat a la partida n-èsima. Així,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

on $\{X_k\}$ són variables aleatòries independents que prenen els valors 1 i -1 amb probabilitat $1/2$. Una altra manera de formular aquest exemple és pensar en un caminant aleatori que surt de l'origen i es mou, a cada etapa, una unitat a l'esquerra o a la dreta amb probabilitat $1/2$. D'aquesta manera, S_n seria la posició del caminant aleatori després de n etapes. És obvi que $-n \le S_n \le n$ i aquesta estimació és immillorable, perquè, encara que improbable, és ben possible que el resultat dels primers n jocs siguin n cares consecutives. Aquesta és la situació en què s'acostuma a dir que el jugador és un *amo*. No obstant això, aquesta estimació òbvia pot millorar-se a gairebé tots els punts, com mostra el resultat següent:

Llei del Logaritme Iterat (Khintchine, 1924)

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n \log\log n}} = \sqrt{2}, \qquad \text{g.p.t.}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n \log\log n}} = -\sqrt{2}, \quad \text{g.p.t.}$$

La llei del logaritme iterat dóna una estimació molt precisa del creixement de S_n. Observem que en el model del joc cara-creu té conseqüències inquietants per als jugadors. Efectivament, a llarg termini, el jugador passa per moments de gran eufòria en què guanya $\sqrt{2n \log\log n}$ euros, sent n el nombre de partides jugades. Però també passa per moments de gran depressió en què perd $\sqrt{2n \log\log n}$ euros. A més, aquests canvis d'estat eufòria/depressió succeeixen infinites vegades. És ben clar que les matemàtiques modelitzen la vida humana!

5 Martingales diàdiques

Les martingales són una noció central en la teoria dels processos estocàstics. El nom sembla provenir de la població francesa de Martingale, on s'utilitzava el sistema d'apostes següent: apostar el doble de la pèrdua. Per exemple, imaginem jugar a vermell/negre en una ruleta. La primera aposta és 1 €. Si es guanya s'abandona la partida. Si es perd es fa una aposta de 2 €. Així continuem inductivament. Certament es tracta d'un sistema d'apostes arriscat que necessita un bon finançament.

> La meva amiga em va prometre que apostaríem junts a la ruleta. Vam agafar tot l'or que vam trobar a casa seva i vam jugar doblant les apostes amb el sistema conegut com a *Martingala*[...]
>
> [Casanova, *Història de la meva vida*, 1754]

En la present discussió es necessita únicament el concepte més simple de martingala diàdica. Una martingala diàdica (a $[0,1)$) és una successió de funcions esglaonades $\{S_n\}$ definides a $[0,1)$ tal que

1. S_n és constant a cada interval diàdic de generació n, $n = 1, 2, \ldots$, que denotem per $S_n(I)$, $I \in \mathcal{D}(n)$.
2. Si I és un interval de generació n amb $I = I_+ \cup I_-$ on $I_+, I_- \in \mathcal{D}(n+1)$, aleshores
$$S_n(I) = \frac{1}{2}(S_{n+1}(I_+) + S_{n+1}(I_-)).$$

La propietat 2 és la responsable dels fenòmens de cancel·lació que presentarem a continuació. De fet, aquesta propietat expressa que la mitjana dels valors de S_{n+1} (i també de S_{n+2}, S_{n+3},...) en un interval de generació n-èsima és precisament el valor de S_n. Vegeu la figura 3. Aquest fet pot ser entès com una versió discreta de la propietat de la mitjana per a funcions harmòniques i és responsable de l'analogia entre les funcions harmòniques i les martingales.

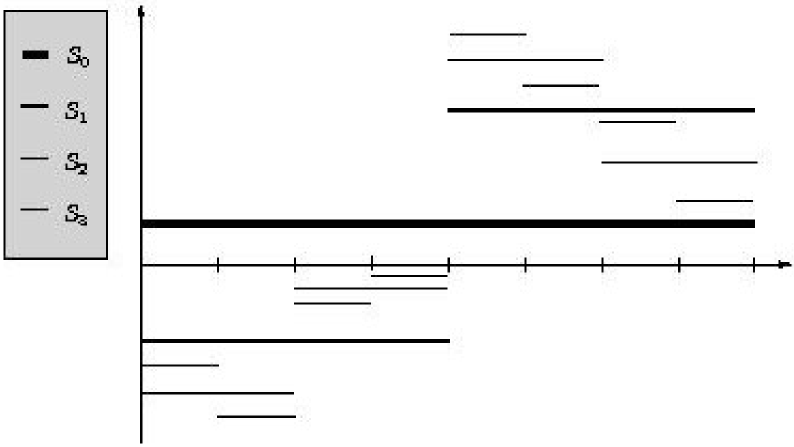

FIGURA 3

Ens interessa entendre el comportament asimptòtic de S_n, és a dir, com evoluciona $S_n(x)$ quan n és gran. Resulta que l'evolució de S_n és governada per la mida de la variació quadràtica que és una successió creixent de funcions positives definides com

$$\langle S\rangle_n^2(x) = \sum_{k=1}^{n} (S_k(x) - S_{k-1}(x))^2.$$

Convé assenyalar que la compensació és inherent al concepte de martingala. En canvi, la variació quadràtica únicament involucra quantitats positives i, per tant, no incorpora cancel·lacions. Per això és tan notable que la variació quadràtica governi el comportament asimptòtic de la martingala, com mostra el resultat següent:

2 TEOREMA *Sigui* $\{S_n\}$ *una martingala diàdica a* $[0,1]$.

(a) (Doob) Aleshores

$$\{x \in [0,1] : \lim_{n\to\infty} S_n(x) \textit{ existeix}\} \overset{g.p.t.}{=} \{x \in [0,1] : \langle S\rangle_\infty(x) < \infty\}.$$

(b) (Stout, 1970) Sigui $E = \{x : \langle S\rangle_\infty(x) = \infty\}$. *Suposem que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|S_{n+1}(x) - S_n(x)|}{\langle S\rangle_n(x)} = 0 \textit{ g.p.t. } x \in E.$$

Aleshores

$$0 < \limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n(x)|}{\sqrt{\langle S\rangle_n^2(x)\log\log\langle S\rangle_n^2(x)}} < \infty \ \textit{g.p.t.}\ x \in E.$$

La notació $\stackrel{\text{g.p.t.}}{=}$ significa que els dos conjunts coincideixen tret d'un conjunt de longitud zero. Així, doncs, la martingala té límit a gairebé tot punt on la variació quadràtica convergeix i, a gairebé tot punt del conjunt on no té límit, el seu creixement màxim ve controlat per la variació quadràtica. Hi ha també estimacions L^p entre la funció maximal $\sup_n |S_n(x)|$ i la variació quadràtica $\langle S\rangle_\infty$. Vegeu [1].

Observem que quan els salts són sempre d'una unitat, com al passeig aleatori, l'enunciat (b) recupera la llei del logaritme iterat de Khintchine. També convé assenyalar que hi ha resultats anàlegs en el context de funcions harmòniques en què la variació quadràtica és substituïda per la funció d'àrea de Lusin. L'anàleg de l'enunciat (a) és un resultat clàssic d'A. Calderón, E. Stein i A. Zygmund ([13]). L'anàleg de la part (b) va ser provat a final dels anys vuitanta per R. Bañuelos, I. Klemes i C. Moore ([1]).

6 Martingales, funcions i mesures

A final dels anys vuitanta, N. Makarov va provar una sèrie de resultats profunds sobre la mesura harmònica en conjunts planars i el comportament asimptòtic de funcions holomorfes. La idea central va ser relacionar aquests temes amb el comportament de certs tipus de martingales diàdiques a l'interval unitat. Vegeu [12]. En aquesta secció, s'adoptarà aquest punt de vista.

A la secció 2 s'ha considerat el comportament dels quocients incrementals de la funció de Weierstrass. Donada una funció $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ és natural construir la martingala $\{S_n\}$ donada per

$$S_n(I) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}, \qquad I = (a,b) \in \mathcal{D}(n).$$

És a dir, S_n pren els valors donats pels quocients incrementals de la funció $f(x)$ sobre els intervals diàdics de generació n. A la secció 4 hem vist que el comportament asimptòtic de $\{S_n\}$ pot ser descrit per la mida de la variació quadràtica

$$\langle S\rangle^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (S_n(I_n(x)) - S_n(I_n'(x)))^2,$$

on $I_n'(x)$ és interval diàdic de generació n tal que $I_n(x) \cup I_n'(x) \in \mathcal{D}(n-1)$. Per tant, cada terme de la suma anterior és una diferència de quocients incrementals. L'anàleg en el context continu són les segones diferències

$$\Delta_2 f(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

i l'anàleg de la variació quadràtica és

$$\langle f\rangle^2(x) = \int_0^1 \Delta_2^2 f(x,h)\frac{dh}{h}.$$

En aquest context, l'anàleg del resultat de Doob citat a la secció anterior va ser provat per E. Stein i A. Zygmund completant un treball previ de Marcinkiewicz [13, p. 262].

3 Teorema (E. Stein, A. Zygmund) *Sigui* $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ *una funció integrable. Suposem que* $\sup\{|\Delta_2 f(x,h)| : |h|<1\}<\infty$ *g.p.t.* $x\in[0,1]$. *Aleshores*

$$\{x\in[0,1] : f \textit{ és derivable a } x\} \overset{g.p.t.}{=} \{x\in[0,1] : \langle f\rangle(x)<\infty\}.$$

Com en el teorema de Doob, el resultat diu que els dos conjunts coincideixen tret possiblement d'un conjunt de longitud zero. En altres paraules, la funció $f(x)$ és derivable a gairebé tot punt on $\langle f\rangle(x)<\infty$ i, recíprocament, a gairebé tot punt on $\langle f\rangle(x)<\infty$ la funció $f(x)$ és derivable. Observem també que la condició $\sup\{|\Delta_2 f(x,h)| : |h|<1\}<\infty$ g.p.t. $x\in[0,1]$ no és realment una restricció, ja que si f és derivable a un punt x llavors $|\Delta_2 f(x,h)|$ estan acotats. Convé assenyalar que no es coneix un anàleg de la llei del logaritme iterat de Stout enunciada a la secció anterior, és a dir, no es tenen bones estimacions del creixement dels quocients incrementals d'una funció f en termes de la mida de les versions truncades de la funció quadràtica $\langle f\rangle$. En el cas de la funció de Weierstrass $f_\lambda(x)$ de la secció 2, la lacunaritat fa la situació més senzilla i permet provar (1).

La discussió de la secció 3 també pot ser entesa des del punt de vista de les martingales diàdiques. Sigui μ una mesura positiva a l'interval $[0,1]$. Volem estudiar la mida del suport de μ. Per això necessitem estudiar el comportament asimptòtic de

$$\frac{\mu(I_n(x))}{|I_n(x)|}.$$

Aquestes densitats poden ser interpretades com un anàleg discret de l'extensió harmònica de la mesura μ al semiplà superior. La idea principal és obtenir un anàleg de la descomposició d'una funció al semiplà com a suma d'una funció harmònica i un potencial de Green. En aquest context discret s'anomena la descomposició de Doob i s'ha d'aplicar a la μ-submartingala $\log\mu(I_n(x))/|I_n(x)|$. Concretament, es tracta de trobar una martingala $\{S_n\}$ (respecte a la mesura μ) i un procés predictible $\{P_n\}$ tal que

$$\log\frac{\mu(I_n(x))}{|I_n(x)|} = S_n(x) + P_n(x). \tag{4}$$

Aquesta descomposició és única tret de constants additives i completament explícita en el sentit que S_n i P_n poden ser escrites en termes de la mesura μ. El terme $P_n(x)$ és una variant de l'entropia i controla el comportament doblant de la mesura μ, és a dir, controla la mida de les ràtios $\mu(I_n(x))/\mu(I_{n-1}(x))$. En el cas de la mesura μ construïda a la secció 3, la situació és transparent i és fàcil comprovar que $P_n \equiv n(\log 2 - h(p))$. En la situació general, resulta que, en la descomposició (4), la martingala S_n és un terme d'error. Efectivament, encara que és difícil estimar S_n directament, resulta que la seva variació quadràtica és senzilla i es pot comprovar que $\langle S\rangle_n^2 \leq 2P_n$. Com s'ha explicat a la secció anterior, el comportament asimptòtic de $\{S_n\}$ queda controlat per $\langle S\rangle_n$ que pot ser acotat per P_n. Així, doncs, no és difícil creure que el terme d'entropia P_n controla l'evolució de

$$\log \frac{\mu(I_n(x))}{|I_n(x)|}.$$

D'aquesta manera es prova el resultat següent (vegeu [11]).

4 Teorema *(a) Sigui μ una mesura de probabilitat a $[0,1]$ tal que $\mu(I_n(x)) \leq p\mu(I_{n-1}(x))$ per tot $x \in [0,1]$ i $n = 0,1,2,\dots$ Aleshores μ és absolutament contínua respecte de la mesura de Hausdorff Λ_ϕ amb*

$$\phi(t) = t^{h(p)} \exp(c\sqrt{\log 1/t \log\log\log 1/t}).$$

(b) Sigui μ una mesura singular respecte a la mesura de Lebesgue. Suposem que hi ha $p > 1/2$ tal que tot interval diàdic $I \in \mathcal{D}(n)$ conté un subinterval $J \in \mathcal{D}(n+1)$ tal que $\mu(J) \geq p\mu(I)$. Aleshores μ és singular respecte a la mesura de Hausdorff Λ_ϕ amb

$$\phi(t) = t^{h(p)} \exp(c\sqrt{\log 1/t \log\log\log 1/t}).$$

La lletra c denota una constant absoluta.

A més, aquest mètode és molt flexible i pot ser aplicat en situacions en què μ dobla malament, és a dir, quan

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mu(I_n(x))}{\mu(I_{n-1}(x))} = 1, \qquad \mu\text{-g.p.t.}$$

o bé, quan μ dobla molt bé,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(I_n(x))}{\mu(I_{n-1}(x))} = \frac{1}{2}, \qquad \mu\text{-g.p.t.}$$

o, fins i tot, quan únicament es té informació en algunes escales diàdiques. També en aquestes situacions es pot calcular la mesura de Hausdorff que governa la regularitat de la mesura μ.

Referències

[1] Bañuelos, R.; Moore, C. *Probabilistic behaviour of Harmonic Functions*. Basel: Birkhäuser, 1999. (Progress in Mathematics; 175)

[2] Besicovitch, A. «On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system». *Math. Ann.*, 110 (1) (1935), 321–330.

[3] Eggleston, H. G. «The fractional dimension of a set defined by decimal properties». *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, 20 (1949), 31–36.

[4] Gerrer, J. «The differentiability of the Riemann function at certain rational multiples of π». *Amer. J. Math.*, 92 (1970), 33–55.

[5] Gerrer, J. «More on the differentiability of the Riemann function». *Amer. J. Math.*, 93 (1971), 33–41.

[6] Hardy, G. H. «Weierstrass non differentiable function». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 17 (1916), 301–325.

[7] Heurteaux, Y. «Sur la comparison des mesures avec les mesures de Hausdorff». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math.*, 321 (1995), 61–65.

[8] Heurteaux, Y. «Dimension of measures: the probabilistic approach». *Publ. Mat.*, 51 (2) (2007), 243–290.

[9] Khintchine, A. «Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung». *Fund. Math.*, 6 (1924), 9–20.

[10] Llorente, J. G. «Punts de vista probabilístics a l'anàlisi». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 18 (2), 59–71.

[11] Llorente, J. G.; Nicolau, A. «Regularity of measures, entropy and the Law of the Iterated Logarithm». *Proc. London Math. Soc. (3)*, 89 (2004), 485–524.

[12] Makarov, N. «Probability methods in the theory of conformal mappings». *Leningrad Math. J.*, 1 (1990), 1–56.

[13] Stein, E. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1970.

[14] Stout, W. «A martingale analogue of Kolmogorov's law of the Iterated Logarithm». *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 3 (1970), 211–226.

[15] Weierstrass, K. «Über continvierliche functionen einer reellen arguments, dier für keinen werth des letzteren einen bestimunten differentialquotienten besitzen». A: *Mathematische Werke*. Vol. II. Berlín: Mayer u-Müller 1895, 71–74.

Departament de Matemàtiques
Facultat de Ciències, Edifici Cc
Universitat Autònoma de Barcelona
08913 Cerdanyola del Vallès, Barcelona, Spain
artur@mat.uab.cat