Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 23, núm. 1, 2008. Pàg. 53–120. DOI: 10.2436/20.2002.01.12

Les equacions de Navier-Stokes. Un repte al determinisme newtonià*

Xavier Mora

Resum S'examina la qüestió de l'existència i unicitat de solució de les equacions de Navier-Stokes no estacionàries. Es posa especial èmfasi en les implicacions filosòfiques i la perspectiva històrica. L'exposició pretén acostar-se al nucli del problema tot mantenint un llenguatge al menys tècnic possible.

Paraules clau: equacions de Navier-Stokes, existència global, unicitat, regularitat

Classificació MSC2000: 35Q30, 76D03, 76D05

Un dels aspectes més valorats de la ciència és la seva capacitat de predir el futur. Per exemple, la mecànica celeste pot predir eclipsis amb molta precisió i antelació. Més relacionat amb el tema d'aquesta exposició és el cas de la meteorologia; en aquest cas, no s'aconsegueix tanta precisió i antelació com es voldria, però els resultats no deixen de ser apreciables.

En aquests exemples, i en molts altres del mateix estil, la possibilitat de predir l'evolució futura d'un sistema es basa a conèixer bé el seu estat present així com les lleis que en governen l'evolució. Matemàticament, l'estat d'un sistema es descriu mitjançant una col·lecció més o menys gran de variables numèriques, i les lleis que governen l'evolució temporal d'aquestes variables acostumen a prendre la forma d'equacions diferencials. Aquestes equacions especifiquen una relació que s'ha de complir en cada moment i que determina la velocitat de variació de les diferents variables a partir del seu valor en aquell mateix moment. En el cas de la mecànica celeste, les variables d'estat són les posicions i velocitats de desplaçament dels diversos astres, i les equacions diferencials en qüestió vénen donades per les lleis de Newton, a saber, que l'acceleració

* Aquest article deriva de dues xerrades donades en la «Trobada en honor de Carles Perelló: Matemàtica i Pensament» (Sant Cugat del Vallès, 16 de novembre de 2002) i en el IV Cicle de Matemàtiques Ferran Sunyer i Balaguer (Sabadell, 24 de febrer de 2005). L'article ha merescut el premi SEMA de l'any 2007 a la divulgació en matemàtica aplicada i la seva versió anglesa ha estat publicada en el *Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada* (núm. 43, 2008, pàg. 105–169).

d'un cos és proporcional a la força a què està sotmès, i que aquesta força es pot calcular a partir de les posicions dels diversos astres mitjançant la fórmula que avui coneixem com a llei de la gravitació universal.

Doncs bé, les equacions de Navier-Stokes no són més que les equacions diferencials que governen una altra forma de moviment, a saber, el moviment d'un fluid, com ara l'aire o l'aigua. De fet, aquestes equacions segueixen expressant la llei de Newton, força igual a massa per acceleració, encara que aquí no es considera pas un conjunt finit de partícules, sinó un material continu. Una altra diferència respecte a la mecànica celeste és que les equacions de Navier-Stokes tenen en compte les forces de fricció, les quals actuen en el sentit de frenar el moviment. En aquesta exposició ens restringirem al cas especial d'un fluid incompressible, és a dir, de densitat constant, que és aproximadament el cas dels líquids.

No cal dir que un bon coneixement del moviment dels fluids és fonamental en molts camps de la ciència i de la tecnologia, des de la fisiologia fins a la indústria aeronàutica.

Tal com hem dit, s'espera que les equacions de Navier-Stokes comparteixin amb les equacions de la mecànica celeste la propietat de determinar l'evolució futura a partir de l'estat present. Doncs bé, els problemes apareixen a l'hora de donar una demostració matemàtica rigorosa d'aquesta afirmació. En el cas de la mecànica celeste, i de moltes altres equacions diferencials, sí que és possible donar tal demostració. En canvi, les equacions de Navier-Stokes s'hi resisteixen aferrissadament. Malgrat els notables esforços que s'han fet en aquest respecte, fins ara no ha estat possible donar una demostració rigorosa del suposat determinisme d'aquelles equacions, ni de la seva absència.

Les dificultats que sorgeixen en aquest problema matemàtic no estan desproveïdes de significat físic. Ja a finals del segle XIX, els experimentadors més acurats havien fet notar que en certes situacions els moviments dels fluids exhibien una aparent manca de determinisme. A aquest fenomen experimental se li va donar el nom de turbulència, ja que el que s'observa no és gaire diferent del significat ordinari d'aquest terme. D'altra banda, també és cert que aquesta aparent manca de determinisme podria ser senzillament el resultat d'una precisió insuficient en l'especificació de l'estat inicial. De fet, avui dia sabem molt bé que les solucions exactes d'una equació diferencial poden ser perfectament deterministes però al mateix temps també poden dependre de manera molt sensible de l'estat inicial, de manera que a la pràctica s'observi un comportament aparentment no determinista. Vers el 1960 els meteoròlegs es van adonar clarament d'aquesta possibilitat (gràcies a la potència de càlcul proporcionada pels ordinadors) i anys després va quedar batejada amb el nom d'*efecte papallona*.

Doncs bé, en relació amb tot això és important notar que el problema del determinisme de les equacions de Navier-Stokes es refereix a quelcom més greu que un simple efecte papallona. Pel que sabem fins ara, podria ser que les solucions matemàtiques exactes de les equacions de Navier-Stokes ja no estiguessin ben determinades! La distinció entre una cosa i l'altra segurament no és important des d'un punt de vista pràctic, però sí que ho és per a la ciència com a eina per a entendre el món.

La importància del problema ha estat reconeguda per diverses persones i institucions que s'han implicat a donar una llista de reptes matemàtics per al segle XXI [72–81]. En particular, és un dels set Problemes del Mil·lenni per als quals el Clay Mathematics Institute (CMI) ha establert un premi d'un milió de dòlars. Tanmateix el problema concret plantejat pel CMI (vegeu [78]) no és exactament el problema del determinisme. En efecte, el determinisme fa referència a l'existència i l'*unicitat* de solucions, mentre que l'enunciat del CMI fa referència a la seva existència i *regularitat*. Tal com veurem, una resposta positiva a aquesta última qüestió implica una resposta positiva a la qüestió del determinisme, però la implicació inversa no és certa. En aquest respecte coincidim plenament amb Olga Ladyzhenskaya [31] i altres autors que el problema realment important és el del determinisme, i aquest punt de vista dominarà la present exposició.

1 Equacions diferencials i determinisme: el cas de la mecànica celeste

Per a ajudar a entendre el significat de les equacions de Navier-Stokes i de les dificultats que plantegen, serà bo tenir present el cas de la mecànica celeste.

En aquest cas, el fenomen que es tracta de descriure és el moviment dels astres. Com és natural, aquesta descripció ha de començar per donar una llista dels *astres* en consideració; simbòlicament, això es pot fer mitjançant un índex α que prengui valors enters entre 1 i N, el nombre d'astres. D'altra banda, és obvi que cal considerar la *posició* de cadascun, la qual denotarem per $\boldsymbol{x}_\alpha$ i suposarem especificada mitjançant coordenades cartesianes $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$. Un altre ingredient imprescindible és la variable *temps* t.

En principi, el moviment dels astres està descrit simplement per les funcions $t \mapsto \boldsymbol{x}_\alpha(t)$, una per a cada α. Tanmateix, per a arribar a una descripció determinista, cal entrar en més detalls. D'entrada, és fonamental considerar la *velocitat* $\boldsymbol{u}$, és a dir, la derivada de la posició respecte al temps, $\boldsymbol{u} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t$. Com en el cas de la posició, la velocitat la suposarem especificada mitjançant coordenades cartesianes $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$, i la velocitat de cada astre α la denotarem per $\boldsymbol{u}_\alpha$. Si en un instant t coneixem no solament la posició d'un astre sinó també la seva velocitat, llavors es pot obtenir una estimació de la posició d'aquell astre al cap d'un petit interval de temps. De manera anàloga, la variació de la velocitat amb el temps porta a considerar la seva derivada $\mathrm{d}\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t$, que anomenem *acceleració*: si en un instant t coneixem la velocitat i l'acceleració, llavors es pot obtenir una estimació de la velocitat al cap d'un petit interval de temps. Però l'acceleració també pot variar amb el temps, de manera que en principi també caldria considerar la seva derivada, i així successivament cap a derivades cada vegada superiors.

A primera vista, sembla ben bé que haguem entrat en una espiral sense fi. Però no és pas així: tal com van descobrir Robert Hooke i Isaac Newton vers 1679–1680, resulta que en la natura hi ha unes lleis que determinen les acceleracions dels astres a partir de les seves posicions! Això canvia bastant les coses: si en un instant t coneixem les posicions i velocitats dels diferents astres, llavors aquestes lleis també ens determinen les seves acceleracions i, per tant, podem obtenir una estimació de les posicions i velocitats al cap d'un petit interval de temps; però a partir d'aquí podem repetir el mateix procés, i així successivament cap a temps cada vegada més grans.

Les lleis en qüestió es coneixen avui dia com la segona llei de Newton i la llei de la gravitació universal. La segona llei de Newton té un caràcter molt general i ve a dir que el producte de la massa per l'acceleració d'un cos ve determinat per la suma de les *forces* que actuen sobre aquest cos, i que aquestes forces estan determinades per certes funcions de les posicions de tots els cossos, i possiblement també de les seves velocitats. La llei de la gravitació universal especifica aquesta funció en el cas de la mecànica celeste.

Així, doncs, podem dir que la descripció determinista del moviment dels astres es resumeix en unes equacions de la forma següent:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{x}_\alpha/\mathrm{d}t \;=\; \boldsymbol{u}_\alpha, \\ \mathrm{d}\boldsymbol{u}_\alpha/\mathrm{d}t \;=\; \boldsymbol{f}_\alpha(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_N)\,/\,m_\alpha, \end{cases} \tag{1}$$

on m_α designa la massa de l'astre α, i $\boldsymbol{f}_\alpha$ és una funció que dóna la força gravitatòria sobre l'astre α a partir de les posicions relatives de tots els altres. Concretament, aquesta funció ve donada per la fórmula següent:

$$\boldsymbol{f}_\alpha(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_N) \;=\; \sum_{\beta\neq\alpha} G\, m_\alpha\, m_\beta\, |\boldsymbol{x}_\beta - \boldsymbol{x}_\alpha|^{-3}\, (\boldsymbol{x}_\beta - \boldsymbol{x}_\alpha), \tag{2}$$

on G és una constant universal i $|\boldsymbol{v}|$ representa la longitud d'un vector $\boldsymbol{v}$.

Conceptualment, el sistema d'equacions (1) té la forma

$$\mathrm{d}z/\mathrm{d}t \;=\; F(z). \tag{3}$$

En el cas que estem considerant, z representa la col·lecció de totes les posicions $\boldsymbol{x}_\alpha$ i velocitats $\boldsymbol{u}_\alpha$, és a dir, una col·lecció de $6N$ nombres, i F representa la col·lecció de funcions que a partir d'aquests nombres determinen els segons membres de (1). Usant una terminologia més general, z representa l'*estat* del sistema que estem considerant, el qual pot variar amb el temps. L'equació (3) diu que en cada instant t aquest estat està variant d'una manera concreta $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ que queda determinada pel mateix valor de z en aquell instant.

Però el que ens interessa és la possibilitat de determinar el futur a partir del present, és a dir, veure si a partir de $z(0)$ es dedueix $z(t)$ per a $t > 0$. Si interpretem la derivada com a quocient d'infinitèsims, podem dir que l'equació (3) dóna aquest determinisme per a valors infinitesimals de t. Una tasca fonamental de la teoria d'equacions diferencials consisteix a passar d'aquí a valors finits de t, i veure si ho podem aconseguir per a valors arbitràriament grans. Tradicionalment, es distingeixen tres aspectes del problema, a saber, l'*existència*, la *unicitat* i la *globalitat* de la solució desitjada de (3). Quan z consisteix en una col·lecció finita de nombres, com és el cas de la mecànica celeste, llavors estem en el camp de les anomenades equacions diferencials ordinàries, per a les quals hi ha resultats força complets respecte a aquestes qüestions. Aplicats a les equacions de la mecànica celeste, aquests resultats garanteixen el determinisme del moviment dels astres mentre no es donin col·lisions (noteu que el segon membre de (2) no està ben definit quan alguna $\boldsymbol{x}_\beta$ coincideix amb $\boldsymbol{x}_\alpha$).

2 Les equacions de moviment d'un fluid incompressible

2.1 D'acord amb la constitució molecular de la matèria, podem imaginar un fluid com una multitud de petits cossos en interacció. Des d'aquest punt de vista, el cas d'un fluid no seria gaire diferent de la mecànica celeste. Tanmateix hi ha una circumstància que canvia bastant les coses: ara el nombre de cossos en joc és extremament gran, de l'ordre de 10^{23} (aquesta quantitat correspon a uns 3 g d'aigua). Evidentment, aquestes xifres fan del tot impensable portar a la pràctica la descripció que hem fet en la secció precedent: encara que comptéssim amb tota la capacitat d'emmagatzematge informàtic actualment existent al nostre planeta, això només permetria especificar l'estat inicial d'uns pocs micrograms d'aigua.

Davant d'això, no hi ha altre remei que adoptar un punt de vista menys detallat. Concretament, el que farem serà considerar el fluid no com un conjunt discret de molècules, sinó com una distribució contínua de matèria per l'espai. Comparant-ho amb el cas de la mecànica celeste, ara la variable α que indexa les «partícules» en interacció no estarà restringida a un conjunt finit, sinó que la deixarem variar de manera contínua. Contràriament al que pot semblar a primera vista, encara que α varií ara dins d'un conjunt infinit, el model que obtindrem serà bastant més tractable que un conjunt finit, però molt gran, de partícules en interacció.

Com en el cas de la mecànica celeste, en principi el moviment del fluid està especificat per una funció de α i t, a saber, la posició de cada partícula α en l'instant t. A causa del caràcter continu de la variable α, ara preferirem escriure $\boldsymbol{x}(\alpha, t)$ en lloc de $\boldsymbol{x}_\alpha(t)$, però això només és qüestió de notació. Una hipòtesi força natural que adoptarem és que dues partícules diferents no poden estar simultàniament en la mateixa posició, és a dir, l'aplicació $\alpha \mapsto \boldsymbol{x}(\alpha, t)$ és injectiva en tot instant t. També suposarem que el fluid omple sempre una regió determinada (és a dir, un conjunt obert i connex) de l'espai; aquesta regió i la seva frontera, les denotarem respectivament per Ω i $\partial\Omega$. En aquestes condicions, la funció $\boldsymbol{x}(\alpha, t)$ defineix un canvi de variables $(\alpha, t) \leftrightarrow (\boldsymbol{x}, t)$ el qual fa adient passar a un nou context on les variables independents no seran la partícula α i el temps t, sinó la *posició* $\boldsymbol{x} \in \Omega$ i el *temps* t. Entre les variables que depenen de $\boldsymbol{x}$ i t destaca especialment la *velocitat* $\boldsymbol{u}$; per definició, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ vol dir la velocitat en l'instant t *de la partícula* que en aquell moment es troba en la posició $\boldsymbol{x}$.

Atès que el que ens interessa és veure si el futur del fluid queda determinat a partir del seu present, les variables independents $\boldsymbol{x}$ i t tenen papers diferents. Tot reflectint això, les funcions de $\boldsymbol{x}$ i t tendirem a mirar-les com a funcions de $\boldsymbol{x}$ les quals varien amb el temps t. Simbòlicament, en lloc de funcions $(\boldsymbol{x},t) \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$, tendirem a pensar en termes de funcions $t \mapsto \boldsymbol{f}(t)$ en què cada valor $\boldsymbol{f}(t)$ representa una funció de $\boldsymbol{x}$ (a saber, la funció $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$). En particular, la velocitat ens la mirarem com un camp vectorial que varia amb el temps (aquí resulta molt adient la terminologia clàssica en la qual les funcions de la posició són anomenades *camps*).

2.2 Tal com veurem de seguida, la naturalesa del problema comporta un ús extensiu de les eines del càlcul infinitesimal, especialment les que fan referència a funcions de diverses variables, com ara les derivades parcials i les integrals de volum i de superfície. Típicament, aquestes eines impliquen unes certes *hipòtesis de regularitat* sobre les funcions en qüestió, i també sobre les regions i superfícies d'integració. A aquest respecte, convé distingir entre les hipòtesis de regularitat que fan referència a les dades del problema, com ara la regió Ω i la seva frontera $\partial\Omega$, i les que fan referència a les incògnites, especialment el camp de velocitats $\boldsymbol{u}$. En aquest segon cas, les hem de considerar com a hipòtesis de treball que resten pendents d'una confirmació a posteriori.

En gran part, la dificultat del problema radica precisament en el fet que algunes d'aquestes últimes hipòtesis no arriben a trobar confirmació.

En alguns casos, això no és tan greu, ja que es resol mitjançant l'adopció de certes versions generalitzades de les nocions en qüestió (de manera anàloga a com l'equació numèrica $x^2 = 2$ porta a estendre la noció de nombre, passant dels nombres racionals als nombres «reals»). Entre les nocions generalitzades que resulten adients en aquest sentit destaquen sobretot la integral de Lebesgue i les derivades febles. De fet, es pot dir que les equacions de Navier-Stokes han tingut un paper històric important com a font de motivació per al desenvolupament d'aquestes tècniques avui dia habituals, especialment les derivades febles.

En altres casos, el problema és més greu, ja que no sembla adient cap generalització que elimini la necessitat de la hipòtesi en qüestió, i d'altra banda tampoc s'aconsegueix confirmar la seva validesa.

A aquest respecte, l'esperit d'aquesta exposició és no entrar en aquests tecnicismes mentre no sigui absolutament necessari (diguem que «tota funció és prou regular fins que no es demostri el contrari»). En particular, no filarem gaire prim respecte a les hipòtesis de regularitat que hagin de satisfer les dades del problema, ja que els resultats existents no milloren substancialment per regulars que siguin les dades. D'altra banda, pel que fa a les incògnites, de moment adoptarem la hipòtesi de treball que són tan regulars com convingui, i més endavant ja farem les rectificacions que calgui.

2.3 Tal com ja hem dit, restringirem la nostra consideració al cas d'un fluid homogeni i *incompressible*. Per definició, això vol dir que la *densitat* ρ es manté constant, és a dir, independent de $\boldsymbol{x}$ i t. Combinada amb el principi de *conservació de la massa*, aquesta hipòtesi imposa una restricció fonamental sobre el camp de velocitats. A continuació ens entretindrem una mica a veure com es dedueix aquesta restricció. Això ens servirà per introduir certes nocions i tècniques bàsiques que més endavant tornaran a aparèixer en altres contextos més complicats.

Una primera idea fonamental és que per a poder parlar de massa no ens podem fixar només en un punt $\boldsymbol{x}$ de Ω, sinó que cal considerar parts més substancials de Ω, les quals denotarem genèricament per ω. El conjunt de possibles eleccions de ω el denotarem $\mathcal{P}(\Omega)$. Per als nostres propòsits serà suficient prendre com a $\mathcal{P}(\Omega)$ el conjunt de totes les boles i cubs continguts a Ω.

Doncs bé, considerem la quantitat de massa continguda a una regió $\omega \in \mathcal{P}(\Omega)$. A causa de la hipòtesi que el fluid té una densitat constant, independent de la posició x i del temps t, aquesta quantitat de massa serà sempre la mateixa, a saber, el volum de ω multiplicat per la densitat del fluid. Noteu que aquesta afirmació deriva simplement del fet que estem suposant una densitat constant així com una regió fixa ω. Fins aquí encara no hem aplicat el principi de conservació de la massa, però ara sí que ho farem. Segons aquest principi, la massa no es pot crear ni destruir. En particular, no pot aparèixer ni desaparèixer a l'interior de ω; el que pot fer, això sí, és entrar o sortir a través de $\partial\omega$ a causa del moviment del fluid. Així, doncs, independentment del fet que ja sabem que la massa continguda a ω es manté constant, la seva variació ha de ser igual al flux net de massa a través de $\partial\omega$. Per tant, deduïm que aquest flux ha de ser nul, és a dir, que s'ha d'anul·lar la integral de superfície $\int_{\partial\omega} \rho\, u_\perp \mathrm{d}S$, on $u_\perp$ representa (per a cada $\boldsymbol{x} \in \partial\omega$) el nombre que dóna la projecció del vector $\boldsymbol{u}$ en una direcció perpendicular i exterior a $\partial\omega$. Per a obtenir aquesta integral només cal adonar-se que en un petit interval de temps $\mathrm{d}t$ les partícules que surten de ω a través d'un petit element de superfície d'àrea $\mathrm{d}S$ formen un petit cilindre de volum $u_\perp \mathrm{d}S\,\mathrm{d}t$. Així, doncs, aquesta integral ha de ser sempre nul·la, o el que és equivalent, atès que ρ és una constant no nul·la, el camp de velocitats ha de complir la condició

$$\int_{\partial\omega} u_\perp \mathrm{d}S = 0, \qquad \forall\,\omega \in \mathcal{P}(\Omega). \tag{4}$$

En aquest punt entra en joc una altra eina fonamental, a saber, el teorema de la divergència. Segons aquest teorema, una integral de superfície de la forma $\int_{\partial\omega} u_\perp \mathrm{d}S$ és igual a la integral de volum $\int_\omega \nabla\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V$, on $\nabla\cdot\boldsymbol{u}$ representa la quantitat $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z$, la qual rep el nom de divergència del camp vectorial $\boldsymbol{u}$. Aplicant aquest resultat, la condició (4) pren, doncs, la forma següent:

$$\int_\omega \nabla\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V = 0, \qquad \forall\,\omega\in\mathcal{P}(\Omega). \tag{5}$$

El següent pas es basa en el caràcter arbitrari de la regió ω. Considerant regions ω cada vegada més petites al voltant d'un punt $\boldsymbol{x}$, no costa gaire de concloure que la funció que estem integrant s'ha d'anul·lar en cada punt de Ω:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \qquad \forall\,\boldsymbol{x}\in\Omega. \tag{6}$$

Així, doncs, el camp de velocitats ha de tenir divergència nul·la a tot arreu. Els camps vectorials que compleixen aquesta condició s'anomenen camps *solenoïdals*. Tal com hem vist, aquesta condició és una versió local de la condició integral (4), la qual expressa el principi de conservació de la massa en el cas particular d'un fluid incompressible.

2.4 Una altra equació fonamental per a descriure el moviment d'un fluid deriva de consideracions similars respecte de la quantitat de moviment en lloc de la massa. Els detalls són aquí una mica més complicats, però essencialment es tracta del mateix tipus d'argumentació. Així com la quantitat de massa continguda a ω ve donada per l'escalar $\int_\omega \rho\,\mathrm{d}V$, la quantitat de moviment ve donada pel vector $\int_\omega \rho\,\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V$. Com en el cas de la massa, el moviment del fluid també comporta un transport de quantitat de moviment a través de $\partial\omega$. Però la quantitat de moviment no té per què mantenir-se constant, ni en una regió fixa de l'espai, com és ω, ni tampoc en una part material del fluid (un conjunt fix de valors de α, el qual es mou per l'espai). Tanmateix, la segona llei de Newton assegura que la quantitat de moviment d'una part material de fluid experimenta una variació que ve donada per les forces que actuen sobre la part de fluid en qüestió. D'aquestes forces n'hi ha de dos tipus: les que actuen a distància, com és el cas de la gravetat, i les que actuen per contacte a través de $\partial\omega$, les quals estan associades a les nocions de pressió i de fricció. Si en lloc d'una part material de fluid considerem una regió espacial fixa ω, llavors cal afegir el terme de transport a través de $\partial\omega$.

Tot plegat, s'arriba a l'equació següent:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_\omega \rho\,\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V\right) + \int_{\partial\omega}\rho\,\boldsymbol{u}\,u_\perp\,\mathrm{d}S = \int_\omega \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}V + \int_{\partial\omega} \boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_\perp\,\mathrm{d}S, \quad \forall\,\omega\in\mathcal{P}(\Omega). \tag{7}$$

El primer terme conté la derivada de la quantitat de moviment continguda a ω, mentre que els altres tres corresponen respectivament, d'esquerra a dreta, al transport a través de $\partial\omega$, les forces a distància i les forces de contacte. Les forces a distància es representen mitjançant un camp vectorial $\boldsymbol{f}$ amb dimensions de força per unitat de volum, mentre que les forces de contacte requereixen una descripció més complicada: $\boldsymbol{e}_\perp$ representa el vector unitari perpendicular i exterior a $\partial\omega$, i $\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_\perp$ representa un vector, amb dimensions de força per unitat d'àrea, el qual s'obté a partir de $\boldsymbol{e}_\perp$ mitjançant una aplicació lineal T que en general dependrà de la posició $\boldsymbol{x}$ (i del temps t); aquesta aplicació lineal s'anomena tensor d'esforços i en coordenades cartesianes ve donada per una matriu simètrica.

L'equació (7) expressa la segona llei de Newton. De manera anàloga al paper de la llei de gravitació universal en la mecànica celeste, aquí també cal suplementar-la amb alguna informació que determini $\boldsymbol{f}$ i T en cada punt $\boldsymbol{x}$. Pel que fa a $\boldsymbol{f}$, suposarem senzillament que en coneixem directament la dependència respecte a $\boldsymbol{x}$ i t. Pel que fa a T, la situació és més complicada, no ja pel caràcter tensorial d'aquesta variable, sinó perquè la seva dependència respecte $\boldsymbol{x}$ i t és, parcialment, a través del camp de velocitats $\boldsymbol{u}$ (atès que les forces de fricció entre dos cossos en contacte depenen de la velocitat relativa d'un respecte a l'altre). En els fluids habituals, la llei que relaciona el tensor d'esforços T amb el camp de velocitats $\boldsymbol{u}$ té la forma següent (per brevetat, escrivim directament una fórmula especialitzada per al cas incompressible):

$$T = -p\, I + \mu\, (\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^{\mathrm{t}}). \tag{8}$$

Els dos termes d'aquesta fórmula corresponen respectivament a les nocions de pressió i fricció. La *pressió* p és una variable escalar que depèn directament de $\boldsymbol{x}$ i t; aquesta variable apareix multiplicant a I, que representa la matriu identitat. Les forces de fricció vénen donades pel segon terme, on $\nabla \boldsymbol{u}$ representa la matriu que conté les derivades de (u, v, w) respecte a (x, y, z), $(\nabla \boldsymbol{u})^{\mathrm{t}}$ representa la transposta de la matriu anterior i μ és un coeficient positiu característic de cada fluid que s'anomena *viscositat*. Per a més detalls sobre el significat de les equacions (7) i (8) i dels seus diferents termes, referim el lector a [67].

A continuació passarem de l'equació integral (7), vàlida per a una regió ω arbitrària, a una equació diferencial vàlida en cada punt $\boldsymbol{x}$. Això es fa de manera anàloga a com ho hem fet en la secció anterior, és a dir, basant-nos en el teorema de la divergència i en el caràcter arbitrari de la regió ω. En aquest cas també cal alguna manipulació addicional, com ara aplicar la relació $\mathrm{d}(\int_\omega \rho \boldsymbol{u}\, \mathrm{d}V)/\mathrm{d}t = \int_\omega \rho\, (\partial \boldsymbol{u}/\partial t)\, \mathrm{d}V$ (que val si $\boldsymbol{u}$ és prou regular), dividir per la constant ρ i utilitzar les relacions (8) i (6). Tot plegat acaba per donar una equació vectorial que s'acostuma a escriure en la forma següent:

$$\partial \boldsymbol{u}/\partial t + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} - \nabla p + \nu\, \Delta \boldsymbol{u}, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{9}$$

Aquí, ∇p representa el gradient de p, és a dir, el vector de coordenades $(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z})$, Δ representa l'operador de Laplace $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ i $\boldsymbol{u} \cdot \nabla$ representa l'operador diferencial $u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$. Aquests dos últims operadors s'apliquen separadament a cada component de $\boldsymbol{u}$. Finalment, ν representa el quocient μ/ρ, que s'anomena viscositat cinemàtica, i $\boldsymbol{f}$ i p són les mateixes que abans però dividides per la constant ρ (alternativament, podem imaginar que hem escollit les unitats de manera que ρ sigui igual a la unitat). Noteu que el primer membre de (9) no és altra cosa que l'acceleració de la partícula que està passant pel punt $\boldsymbol{x}$, és a dir, la derivada de $\boldsymbol{u}$ respecte a t quan es manté constant α (no $\boldsymbol{x}$); en efecte, segons la regla de la cadena aplicada a la composició $(\alpha, t) \mapsto (\boldsymbol{x}, t) \mapsto u$, aquesta derivada ve donada per $\partial u/\partial t + \nabla u \cdot \partial \boldsymbol{x}/\partial t = \partial u/\partial t + \boldsymbol{u} \cdot \nabla u$, i similarment amb els altres components de $\boldsymbol{u}$. Noteu també que la pressió només intervé en l'equació a través del seu gradient, de manera que dos camps de pressió que difereixin en una constant es poden considerar ben bé equivalents.

L'equació (9) va ser obtinguda a la primera meitat del segle XIX per diversos autors: Claude Navier (1822), Augustin Cauchy (1822), Siméon Poisson (1829), Adhémar Barré de Saint-Venant (1843) i George Stokes (1845) [2–6]. Avui dia se la coneix pel nom del primer i l'últim d'aquests cinc autors, però els altres tres també hi van arribar de manera més o menys independent. El lector interessat en els detalls històrics pot consultar [68]. El principal mèrit d'aquests autors va ser trobar la manera de descriure la fricció a través del tensor d'esforços T, ja que en absència de fricció les equacions corresponents ($\nu = 0$) ja havien estat obtingudes el 1755 per Leonhard Euler [1].

2.5 Amb vista a determinar el futur del fluid a partir del seu present, les equacions (9) i (6) s'han de suplementar amb unes condicions addicionals sobre $\boldsymbol{u}$ que especifiquen el que passa en els límits de la regió Ω.

A aquest respecte, sovint es considera el cas en què Ω representa un recipient de parets rígides i immòbils. En aquest cas, un fluid viscós es veu obligat a satisfer la següent *condició d'absència de lliscament* respecte a les parets:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega. \tag{10}$$

Aquesta condició es pot descompondre en dues parts, corresponents respectivament als components normal i tangencial de $\boldsymbol{u}$ a $\partial\Omega$, els quals denotarem respectivament $u_\perp$ i $\boldsymbol{u}_{/\!/}$ $(\boldsymbol{u} = u_\perp \boldsymbol{e}_\perp + \boldsymbol{u}_{/\!/})$:

$$u_\perp = 0, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \tag{$10)_\perp$}$$

$$\boldsymbol{u}_{/\!/} = \boldsymbol{0}, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega. \tag{$10)_{/\!/}$}$$

Les condicions $(10)_\perp$ i $(10)_{/\!/}$ tenen raons de ser diferents: la primera obeeix a raons purament cinemàtiques, mentre que la segona és conseqüència de la viscositat. Tal com veurem, aquestes dues condicions també juguen papers diferents en les matemàtiques del problema. Els camps vectorials que compleixen la condició $(10)_\perp$ es coneixen com a camps paral·lels a la frontera.

En el cas d'una regió Ω no acotada, que sorgeix de manera natural quan ens interessem en fenòmens d'una escala espacial relativament petita, també és necessària una *condició a l'infinit*, és a dir, una especificació del comportament de la velocitat $\boldsymbol{u}$ quan $\boldsymbol{x}$ s'allunya cap a l'infinit. A aquest respecte, sovint s'escau una condició de la forma següent:

$$\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{0}, \qquad \text{quan} \quad |\boldsymbol{x}| \to \infty. \tag{11}$$

D'altra banda, per a alguns aspectes del tractament matemàtic del problema pot convenir situar-se en unes hipòtesis més restrictives que (11), com ara alguna condició del tipus següent:

> En el límit $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ el camp vectorial $\boldsymbol{u}$ tendeix a zero almenys tan de pressa com $|\boldsymbol{x}|^{-\alpha}$, i les seves derivades espacials d'ordre $k \leq m$ satisfan condicions anàlogues amb l'exponent $\alpha + k$ en lloc de α. (12)

Tanmateix aquest tipus de condicions es poden considerar condicions de regularitat a l'infinit, i en l'esperit de § 2.2 no entrarem en gaires detalls en aquest respecte. En tot cas, només assenyalarem que les condicions de tipus (12) es poden relacionar amb la convergència de certes integrals, en particular la integral que representa l'energia cinètica, és a dir, $\rho\, \frac{1}{2} \int_\Omega |\boldsymbol{u}|^2\, \mathrm{d}V$.

Encara que en els apartats precedents no hem fet referència explícita al temps, és obvi que totes aquestes equacions i condicions les demanem en cada instant t, i el que ens interessa és determinar la solució per a $t > 0$ a partir d'una *condició inicial* de la forma

$$\boldsymbol{u}|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0, \tag{13}$$

on el camp $\boldsymbol{u}_0$ se suposa donat.

2.6 La regió Ω ocupada pel fluid, la suposarem tridimensional o potser bidimensional. Aquest últim cas no és només un entreteniment acadèmic, sinó que correspon al cas d'una regió tridimensional de la forma $\{(x,y,z) \mid (x,y) \in \Omega,\ z \in \mathbb{R}\}$ quan se suposa que cada partícula del fluid es mou en un pla perpendicular a la direcció z i que el moviment és el mateix independentment de z. Aquest tipus de moviments s'anomenen *moviments plans*.

En particular, es poden distingir els tres casos següents, amb $n = 2$ o 3:

- *i*) Ω és una regió acotada de $\mathbb{R}^n$ i es demana que $\boldsymbol{u}$ compleixi la condició (10).
- *ii*) Ω és tot l'espai $\mathbb{R}^n$ i es demana que $\boldsymbol{u}$ compleixi la condició (11).
- *iii*) Ω és el tor $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$; o equivalentment: Ω és tot l'espai $\mathbb{R}^n$ i es demana que $\boldsymbol{u}$ compleixi una condició de periodicitat en n direccions ortogonals.

Els casos *ii*) i *iii*) són menys *realistes* que *i*), però retenen les dificultats essencials del problema i en canvi en simplifiquen certs aspectes tècnics; això últim és a causa que alguns aspectes del problema es presten a un càlcul explícit, en gran part gràcies al fet que $\partial\Omega = \varnothing$. Per aquest motiu, el «problema del mil·lenni» especificat pel Clay Mathematics Institute es restringeix als casos *ii*) i *iii*) (amb $n = 3$).

D'altra banda, també suposarem que el camp de forces a distància és nul: $\boldsymbol{f} = 0$. En lloc d'això, podríem suposar que és el gradient d'un potencial, $\boldsymbol{f} =$

$\nabla\phi$, tal com ocorre en el cas de la gravetat, però aquest cas aparentment més general es redueix a l'anterior prenent $q = p - \phi$ com a nova variable en lloc de p. Així, doncs, el problema que ens ocupa consisteix a resoldre les equacions (9) (amb $\boldsymbol{f} = 0$) i (6) junt amb les condicions (10), (11) i (13). El sistema d'equacions a resoldre és, doncs, el següent:

$$\begin{gathered} \partial\boldsymbol{u}/\partial t = \nu\,\Delta\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} - \nabla p, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \\ \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{u}|_{\infty} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{u}|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0, \end{gathered} \tag{14}$$

on l'expressió $\boldsymbol{u}\,|_{\infty} = \boldsymbol{0}$ s'ha d'entendre com una representació simbòlica de la condició a l'infinit (11). D'ara endavant, també ens referirem a aquestes equacions com a (14.1)–(14.5), i en lloc de $(10)_{\perp}$ i $(10)_{/\!/}$ també escriurem $(14.3)_{\perp}$ i $(14.3)_{/\!/}$. Noteu que en el cas *i*) no hi ha manera que $\boldsymbol{x}\in\Omega$ es pugui allunyar cap a l'infinit, i per tant la condició (14.4) resulta buida. En el cas *ii*) resulta buida la condició (14.3), ja que $\partial\Omega = \emptyset$. Finalment, en el cas *iii*) es pot entendre que Ω és un tor, sense frontera ni cap possibilitat d'allunyar-se cap a l'infinit, de manera que llavors són buides tant (14.3) com (14.4).

3 Perspectives de determinisme

3.1 Comencem per observar que d'alguna manera tenim tantes equacions com incògnites. En efecte, de les equacions recollides a (14) només n'hi ha dues que s'hagin de complir en tot punt de Ω, a saber, (14.1) i (14.2), de les quals la primera té caràcter vectorial i la segona té caràcter escalar. En correspondència amb això, també hi ha dues incògnites a determinar sobre tot Ω, una de caràcter vectorial i l'altra de caràcter escalar, a saber, el camp de velocitats $\boldsymbol{u}$ i el camp de pressions p.

Tal com ja hem insinuat a § 1, la nostra intenció és mirar-nos el sistema (14) com una equació «abstracta» de la forma (3): $dz/dt = F(z)$, on z és un objecte que representa l'estat del sistema en cada instant. Pel que acabem de dir, sembla, doncs, que z ha de consistir en l'especificació dels camps de velocitats i de pressions, $\boldsymbol{u}$ i p. Això és cert fins a un cert punt, però hi ha alguna cosa que no acaba de quadrar: Certament, si coneixem els camps $\boldsymbol{u}$ i p en un instant, llavors coneixem el segon membre de (14.1) i per tant aquesta equació determina $\partial\boldsymbol{u}/\partial t$. Però, en canvi, l'equació (14.2), que d'alguna manera correspon a la pressió, no ens dóna pas $\partial p/\partial t$. La solució a aquest enigma és que les condicions (14.2), $(14.3)_{\perp}$ i (14.4) determinen p directament a partir de $\boldsymbol{u}$: en cada instant hi ha un sol camp de pressions (mòdul una constant additiva) que aconsegueix que l'evolució de $\boldsymbol{u}$ segons (14.1) mantingui les condicions esmentades.

Això és a causa d'un resultat que d'alguna manera es remunta a Stokes (1849) [7] i a Hermann von Helmholtz (1858) [9] i que en general es pot enunciar així: *Tot camp vectorial sobre una regió acotada es descompon de manera única en suma d'un camp gradient més un camp solenoïdal paral·lel a la frontera; en el cas d'una regió no acotada, això segueix sent cert a condició de restringir-se* *a camps que s'anul·lin a l'infinit.* Així, doncs, per a qualsevol camp vectorial $\boldsymbol{g}$ sobre Ω que compleixi $\boldsymbol{g}|_\infty = \mathbf{0}$ hi ha un únic camp gradient ∇q per al qual $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g} - \nabla q$ compleix $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ a Ω, $v_\perp = 0$ a $\partial\Omega$ i $\boldsymbol{v}|_\infty = \mathbf{0}$. Aplicant aquest resultat al camp $\boldsymbol{g} = \nu\,\Delta\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u}$ que apareix en l'equació (14.1), veiem com efectivament ∇p queda determinada pel requeriment que $\partial\boldsymbol{u}/\partial t$ mantingui les condicions (14.2), $(14.3)_\perp$ i (14.4).

D'acord amb aquestes observacions, el problema que ens ocupa s'emmotlla a una equació «abstracta» de la forma (3): $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t = F(z)$, on la variable z es redueix a l'especificació del camp de velocitats $\boldsymbol{u}$.

3.2 Com moltes altres equacions diferencials, les equacions de Navier-Stokes no es presten pas a una resolució efectiva mitjançant les eines habituals del càlcul infinitesimal. En tot cas, això només és factible en alguns casos especials molt aïllats. Tanmateix sempre es pot intentar resoldre-les numèricament, és a dir, buscar-ne solucions aproximades mitjançant mètodes numèrics.

A aquest respecte, és interessant notar que el desenvolupament de mètodes numèrics per a la resolució d'equacions en derivades parcials va ser motivat en gran part per un problema prou afí al que ens ocupa i força important en la vida quotidiana: la meteorologia. Certament, el temps atmosfèric és el resultat de certs processos físics entre els quals juga un paper fonamental el moviment de l'atmosfera com a fluid; d'acord amb això, la seva evolució temporal es descriu mitjançant un sistema d'equacions diferencials que conté certes variants de les equacions de la dinàmica de fluids [69]. Ja el 1904 el noruec Vilhelm Bjerknes es plantejava la predicció meteorològica mitjançant la resolució numèrica de les equacions diferencials rellevants a partir d'un estat inicial conegut [11]. Evidentment, li mancaven les eines computacionals d'avui dia, en lloc de les quals utilitzava certs mètodes gràfics. No gaire més tard, el 1920, el britànic Lewis Fry Richardson atacava el mateix problema mitjançant el mètode de diferències finites, és a dir, discretitzant l'espai i el temps mitjançant una quadrícula prou fina i substituint les derivades parcials per quocients de diferències finites. De totes maneres, seguia mancant-li la tecnologia computacional actual: per a predir el temps al cap de sis hores necessitava sis setmanes de feina intensiva! Aquestes xifres van començar a canviar a mitjan segle XX amb l'aparició dels primers ordinadors: el 1953, com a resultat final d'un projecte impulsat per John von Neumann, l'ordinador MANIAC I (Mathematical Analyzer, Numerical Integrator And Computer) de l'Institute for Advanced Study, de Princeton, ja era capaç de fer pronòstics meteorològics prou satisfactoris de vint-i-quatre hores en un temps de càlcul de l'ordre de deu minuts. Des de llavors, la potència de càlcul dels ordinadors no ha deixat d'augmentar i avui dia la resolució numèrica de les equacions de la meteorologia o de les equacions de Navier-Stokes es pot considerar a l'abast de qualsevol ordinador. El lector que estigui interessat en el tema de la resolució numèrica de les equacions de Navier-Stokes pot consultar [70], on es passa revista al mètode d'elements finits.

De totes maneres, els meteoròlegs computacionals no van trigar gaire a adonar-se que les prediccions que proporcionaven els ordinadors eren molt sensibles a petits canvis en les dades inicials: les prediccions corresponents a estats inicials lleugerament diferents divergien notablement, i al cap de períodes relativament curts ja no semblaven tenir cap relació entre si. Aquesta sensibilitat respecte a les dades inicials va ser constatada en un simposi crucial que va tenir lloc a Tòquio el 1960, on Edward Lorenz va aportar diverses observacions «experimentals». Poc després, el 1963, el mateix Lorenz va fer veure com aquest fenomen podia estar present ja en les solucions exactes d'alguns sistemes ben senzills d'equacions diferencials ordinàries. Avui dia se'l coneix com a «efecte papallona», arran d'una conferència que Lorenz va fer el 1972 amb el títol: «Predictibilitat: pot ser que l'aleteig d'una papallona al Brasil desencadeni un tornado a Texas?».

3.3 Aquestes observacions numèriques i teòriques de Lorenz són molt afins a certes observacions experimentals amb fluids reals realitzades ja al segle XIX, especialment per Osborne Reynolds el 1883 [10].

L'experiment de Reynolds consistia a fer passar aigua per un tub llarg i estret. Aquest tub sortia en direcció horitzontal des de la part inferior d'un dipòsit on l'aigua estava pràcticament en repòs. A la sortida del tub hi havia una clau que permetia controlar el cabal, és a dir, la quantitat d'aigua que passava per unitat de temps. D'altra banda, l'entrada al tub consistia en una mena d'embut ben arrodonit on arribava un tubet capil·lar que deixava anar aigua tenyida amb anilina. L'aparell era de vidre, la qual cosa permetia observar visualment el moviment de l'aigua tenyida. Doncs bé, quan el cabal era prou petit, aquesta última formava un filament rectilini molt ben definit que es mantenia fins a la sortida; en canvi, per a cabals més grans, aquest filament només es mantenia rectilini i ben definit fins a una certa distància de l'entrada, i a partir d'aquest lloc sorgien unes oscil·lacions i uns moviments irregulars que acabaven per dispersar el colorant de manera uniforme per tota la secció del tub.

Aquest fenomen rep el nom de *turbulència*, ja que el que s'observa no és gaire diferent del significat ordinari d'aquest terme. En general, la turbulència ocorre per a valors prou grans d'un paràmetre adimensional que avui coneixem com a nombre de Reynolds, a saber, $Re = Ud/\nu$, on U representa la velocitat mitjana del fluid en el tub (és a dir, el cabal dividit per l'àrea de la secció), d és el diàmetre del tub i ν és la viscositat cinemàtica del fluid.

En l'experiment de Reynolds crida especialment l'atenció el fet que les oscil·lacions i moviments irregulars que donen pas a la turbulència sorgeixen a partir d'un flux d'entrada ben rectilini i aparentment invariable. Això recorda molt la qüestió del determinisme i de la sensibilitat respecte a les condicions inicials. D'alguna manera, aquí la variable temps t es veu reemplaçada per la distància x des de l'entrada al tub, però aquestes dues variables estan relacionades a través de la velocitat mitjana U, la qual està fixada per les condicions experimentals.

3.4 Així, doncs, tant els experiments amb fluids reals com les simulacions numèriques mostren situacions on hi ha una aparent manca de determinisme, o, si més no, una gran sensibilitat respecte a les condicions inicials.

Pel que fa a les simulacions numèriques, s'ha de tenir en compte que no donen les solucions exactes de les equacions de moviment del fluid. En principi, s'espera que les solucions numèriques s'aproximin cada vegada més a les solucions exactes a mesura que la discretització es faci més fina. Tanmateix, vista la inestabilitat que hi ha respecte a petits canvis en l'estat inicial, no costa gaire de sospitar que també hi pot haver una inestabilitat similar respecte a petits canvis en les equacions. Així, doncs, encara que els mètodes numèrics sempre donin alguna solució numèrica definida per a tot temps $t \geq 0$, en general no està clar que aquesta solució numèrica es mantingui a prop d'una solució exacta.

Tot plegat, segueix, doncs, en peu la pregunta següent:

Pregunta 1. *És cert que les equacions de Navier-Stokes determinen tot el moviment futur del fluid a partir del seu estat inicial?*

Dit d'una altra manera: És cert que per a cada estat inicial hi ha una sola solució de les equacions de Navier-Stokes, i que aquesta està definida per a tot temps $t \geq 0$? O també: És cert que el *problema d'evolució* per a les equacions de Navier-Stokes té les propietats d'*existència, unicitat* i *globalitat* de la solució?

4 El punt de vista funcional

4.1 Més amunt ja hem vist que per a especificar l'estat de moviment d'un fluid incompressible ens podem limitar a donar el camp de velocitats $\boldsymbol{u}$. Tal com hem anat insistint, la dependència de $\boldsymbol{u}$ respecte a la posició $\boldsymbol{x}$ l'entenem com un component *intern* d'un cert objecte, i és aquest objecte en conjunt el que considerem que varia amb el temps t. Aquest punt de vista és molt propi de l'*anàlisi funcional*, on les funcions definides sobre una regió Ω es miren com a punts dins de certs espais abstractes.

De fet, es pot dir que l'estudi de les equacions de Navier-Stokes ha jugat un paper important en el desenvolupament de diverses parts de l'anàlisi funcional. Per exemple, més avall veurem com algunes idees clau de la celebrada teoria de distribucions, que Laurent Schwartz va formular amb tot detall el 1950–1951, apareixen ja en els treballs de Carl Oseen (1910) i de Jean Leray (1933–1934) sobre les equacions de Navier-Stokes (i en 1934–1935 aquest últim les exposava en unes lliçons al Collège de France on assistia el jove Schwartz). Altres temes de l'anàlisi funcional que s'han vist impulsats per l'estudi de les equacions de Navier-Stokes són per exemple la teoria de semigrups, les equacions diferencials en espais de Banach i les potències fraccionàries d'operadors.

4.2 A continuació introduïm breument les nocions bàsiques que ens interessen de l'anàlisi funcional i les notacions que utilitzarem en aquest respecte. Recordem que els objectes que ens interessen són funcions sobre Ω, especialment funcions amb valors a $\mathbb{R}^n$ —com és el cas del camp de velocitats $\boldsymbol{u}$. Aquestes funcions formen certament un espai vectorial, però a diferència de $\mathbb{R}^n$ aquest espai no disposa d'una base finita. Tot i així, s'hi poden estendre diverses eines força útils.

Per començar, ens interessa la noció de *norma*, que ve a estendre la noció de longitud d'un vector de $\mathbb{R}^n$. Una norma no és més que una manera adient de mesurar la *magnitud* d'un vector. Per als vectors que ens interessen aquí, a saber, funcions sobre Ω, podem escollir entre múltiples opcions, entre les quals destacarem la norma del suprem $\|\boldsymbol{u}\|_\infty = \sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega} |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})|$ i la norma quadràtica $\|\boldsymbol{u}\|_2 = (\int_\Omega |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})|^2 \,\mathrm{d}V)^{1/2}$, on $|\boldsymbol{w}|$ denota la longitud d'un vector $\boldsymbol{w}$ de $\mathbb{R}^n$. La norma quadràtica és especialment significativa en el problema que ens ocupa, ja que el seu quadrat és essencialment l'energia cinètica (només manca multiplicar per la constant $\rho/2$).

Fent joc amb la norma quadràtica, resulta molt útil considerar també l'operació que donats dos camps vectorials $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ els assigna el nombre $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \int_\Omega \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}V$, on $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{w}'$ denota el producte escalar de dos vectors $\boldsymbol{w}$ i $\boldsymbol{w}'$ de $\mathbb{R}^n$. En particular, $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \|\boldsymbol{u}\|_2^2$. Aquesta operació rep el nom de *producte escalar* (o producte intern) dels camps vectorials $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$, ja que té propietats anàlogues al producte escalar de vectors de $\mathbb{R}^n$. Per analogia amb aquest últim cas, el producte escalar funcional que acabem de definir dóna lloc a una noció d'*ortogonalitat*, la qual resulta especialment útil en el problema que ens ocupa. Per definició, dos camps vectorials $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ són ortogonals quan $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$. D'altra banda, de vegades no es tracta tant de saber si $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ és nul com de saber si és positiu o negatiu, és a dir, si l'*angle* format per $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ és agut o bé obtús.

Cada norma dóna lloc a una *distància*, la qual determina una topologia. Per definició, la distància entre $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ és la magnitud de la seva diferència, és a dir, $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|$. Contràriament al que passa en els espais vectorials de dimensió finita, una successió de funcions pot ser convergent en una norma i no ser-ho en una altra. Similarment, si tenim un camp vectorial $\boldsymbol{u}$ que varia amb el temps, aquesta variació pot ser contínua en una norma i discontínua en una altra. Així, doncs, l'elecció de la norma pot ser crucial a l'hora d'analitzar els diversos aspectes del problema que ens ocupa.

D'altra banda, de cara a assegurar l'existència de solucions de determinades equacions, també és crucial situar-se en un espai *complet* (és a dir, un espai on les successions de Cauchy siguin convergents). En altres paraules, cal situar-se en algun espai de Banach (espai normat complet) o de Hilbert (cas en què la norma deriva d'un producte escalar). Malauradament, la completesa està renyida amb la regularitat que hem adoptat com a hipòtesi de treball a § 2.2: les funcions molt regulars no constitueixen pas espais complets en les normes que ens interessen (com ara $\|\boldsymbol{u}\|_\infty$ o $\|\boldsymbol{u}\|_2$). Això fa necessari desenvolupar certes construccions de compleció, o el que és equivalent, de clausura dins de certs espais complets ja coneguts.

Entre aquests últims s'hi compten els espais $C(\bar{\Omega})$ i $L_2(\Omega)$. L'espai $C(\bar{\Omega})$, que utilitza la norma del suprem $\|\boldsymbol{u}\|_\infty$, està format senzillament per totes les funcions que són contínues i acotades sobre $\bar{\Omega}$. L'espai $L_2(\Omega)$, que utilitza la norma quadràtica $\|\boldsymbol{u}\|_2$ i el producte escalar $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$, està format per totes les funcions sobre Ω que tenen quadrat integrable en el sentit de Lebesgue (tot identificant les funcions que només difereixen en un conjunt de mesura nul·la). En general estarà clar pel context si ens estem referint a funcions amb valors a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{R}^n$, però si és necessari ho especificarem mitjançant notacions com ara $L_2(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

A més de constituir un punt de partida natural per a les construccions de compleció que determinen els espais on cal buscar les solucions, les funcions regulars també juguen un altre paper fonamental, d'alguna manera dual del precedent, en la definició que donarem més endavant de la noció de solució feble. En relació amb això, serà útil fixar certs conjunts concrets de funcions regulars. D'alguna manera es tracta d'especificar què entenem per una funció regular i de distingir aquelles que compleixen certes condicions que ens interessen, com per exemple anul·lar-se a $\partial\Omega$ i a l'infinit. D'altra banda, els resultats que s'obtenen mitjançant l'ús d'aquests conjunts són relativament independents de la manera exacta com s'hagin definit. Per als nostres propòsits, serà suficient considerar els conjunts següents de funcions de $\boldsymbol{x} \in \Omega$:

$\mathcal{D}(\bar{\Omega})$: el conjunt format per les funcions sobre Ω que són infinitament derivables, amb derivades successives acotades, i que s'anul·len quan $|\boldsymbol{x}|$ supera un cert valor (el qual pot variar segons la funció; aquesta última condició és buida quan Ω és acotat).

$\mathcal{D}(\Omega)$: el subconjunt de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ format per les funcions que s'anul·len a tot un entorn de $\partial\Omega$ (el qual pot variar segons la funció); d'aquestes funcions es diu que tenen suport compacte (dins de l'obert Ω).

$\mathcal{D}_\sigma(\Omega)$: el subconjunt de $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^n) \simeq \mathcal{D}(\Omega)^n$ format pels camps vectorials solenoïdals (és a dir, els que tenen divergència nul·la).

D'altra banda, també caldrà considerar funcions regulars de $\boldsymbol{x} \in \Omega$ i $t \in [0, T)$. A aquest respecte farem ús dels conjunts següents, on $\mathcal{X}(\Omega)$ pot ser $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$, $\mathcal{D}(\Omega)$ o $\mathcal{D}_\sigma(\Omega)$, i el valor de T estarà clar pel context:

$\widetilde{\mathcal{X}}(\Omega)$: el conjunt format per les funcions de $\boldsymbol{x} \in \Omega$ i $t \in [0, T)$ que són infinitament derivables respecte a ambdues variables i pertanyen a $\mathcal{X}(\Omega)$ per a cada $t \in [0, T)$.

5 Aproximacions successives i solucions clàssiques

5.1 Els primers resultats sobre l'existència i unicitat de solucions (exactes) de les equacions de Navier-Stokes van ser obtinguts pel suec Carl Oseen dins d'una sèrie d'articles publicats a partir del 1907. En un d'ells, aparegut el 1910 [12: § II.3], Oseen va obtenir les solucions per a $\Omega = \mathbb{R}^3$ mitjançant un procediment que Joseph Liouville (1830), Émile Picard (1890) i altres autors ja havien aplicat amb èxit a altres equacions diferencials i que avui dia és força habitual, especialment en el cas d'equacions diferencials ordinàries. Tradicionalment se'l coneix com a *mètode d'aproximacions successives*, encara que aquest nom també seria aplicable a qualsevol altre mètode en què la solució $\boldsymbol{u}$ s'obtingui com a límit d'alguna successió $\boldsymbol{u}_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. El que és característic del mètode d'aproximacions successives és que aquesta successió respon a un *procés iteratiu* en el qual cada aproximació $\boldsymbol{u}_m$ $(m > 1)$ es determina a partir de l'anterior $\boldsymbol{u}_{m-1}$ (la primera aproximació $\boldsymbol{u}_1$ serà totalment arbitrària). Més concretament, cada pas de la iteració consisteix a resoldre un problema *lineal* (no homogeni) relacionat amb el que ens interessa. Dins d'això, encara hi ha diverses variants; de fet, la que descriurem a continuació és diferent de la utilitzada per Oseen.

Recordem que ens interessa resoldre el problema (14), el qual reescrivim a continuació amb un petit canvi en l'ordre dels termes de (14.1):

$$(14)\qquad \begin{gathered} \partial\boldsymbol{u}/\partial t - \nu\,\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p \;=\; -(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u}, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{u} \;=\; 0, \\ \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} \;=\; 0, \qquad \boldsymbol{u}|_{\infty} \;=\; 0, \qquad \boldsymbol{u}|_{t=0} \;=\; \boldsymbol{u}_0. \end{gathered}$$

Doncs bé, per a acostar-nos gradualment a les solucions d'aquestes equacions ens basarem a saber resoldre el següent problema lineal no homogeni:

$$\begin{gathered} \partial\boldsymbol{u}/\partial t - \nu\,\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p \;=\; \boldsymbol{f}, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{u} \;=\; 0, \\ \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} \;=\; \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{u}|_{\infty} \;=\; \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{u}|_{t=0} \;=\; \boldsymbol{u}_0, \end{gathered} \tag{15}$$

on $\boldsymbol{f}$ és una funció donada de $\boldsymbol{x}$ i t.

5.2 El problema (15) és molt afí a l'equació de la calor $\partial u/\partial t - \nu\Delta u = f$ amb condicions suplementàries anàlogues a les de (15) (llevat de (15.2), ja que la incògnita de l'equació de la calor és un camp escalar). En el fons, la resolució de (15) consisteix a combinar la resolució del problema de la calor amb la descomposició de Stokes-Helmholtz que hem considerat a § 3.1. En resum, resulta que la solució de (15) es pot expressar mitjançant una fórmula del tipus

$$\boldsymbol{u}(t) = \Gamma(t) * \boldsymbol{u}_0 + \int_0^t \Gamma(t-s) * \boldsymbol{f}(s)\,\mathrm{d}s, \tag{16}$$

on $\Gamma(t)$ representa una matriu $n\times n$ que depèn de t i de dues variables espacials $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \Omega$, i, per a un camp vectorial $\boldsymbol{v}$ arbitrari, $\Gamma(t) * \boldsymbol{v}$ representa l'operador integral de nucli $\Gamma(t)$, és a dir,

$$(\Gamma(t) * \boldsymbol{v})(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega \Gamma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V(\boldsymbol{y}). \tag{17}$$

Per a $\Omega = \mathbb{R}^n$, la dependència de Γ respecte a les dues variables espacials $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ és a través de la seva diferència $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ (de manera que la integral $\Gamma(t) * \boldsymbol{v}$

correspon llavors a la noció de convolució, que és el sentit habitual del símbol $*$). Però mentre poguem no voldríem excloure el cas $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, de manera que mantindrem la forma general $\Gamma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)$.

5.3 Certament, les equacions (14) es poden veure com un cas particular de (15) en què $\boldsymbol{f} = -(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}$. Aplicant la fórmula (16) se'n dedueix que $\boldsymbol{u}$ és solució de (14) si, i només si, compleix la següent *equació integral*:

$$\boldsymbol{u}(t) = \Gamma(t) * \boldsymbol{u}_0 - \int_0^t \Gamma(t-s) * ((\boldsymbol{u}(s) \cdot \nabla)\, \boldsymbol{u}(s))\, \mathrm{d}s. \tag{18}$$

Noteu que en aquesta equació no apareix pas la derivada de $\boldsymbol{u}$ respecte a t, ni tampoc cap derivada de segon ordre respecte a $\boldsymbol{x}$. Per tant, a l'hora de plantejar-se si una funció $\boldsymbol{u}$ és o no solució de (14) o de (18), aquesta última equació és *menys exigent en la regularitat que cal suposar d'entrada* sobre $\boldsymbol{u}$. D'altra banda, si $\boldsymbol{u}$ té un mínim de regularitat, per exemple si té derivades espacials contínues i acotades, llavors el fet de ser solució de (18) implica automàticament la regularitat requerida per (14) i el compliment d'aquesta equació. Això es deu a un efecte regularitzador de l'operador Γ.

5.4 A continuació transformarem l'equació (18) en una altra d'equivalent que és encara menys exigent en la regularitat que demana a $\boldsymbol{u}$. Aquest pas no és estrictament necessari, però simplifica el tractament subseqüent (en particular permet tractar alhora els casos $n=2$ i $n=3$).

El que farem serà transformar l'expressió $\Gamma(t-s) * ((\boldsymbol{u}(s) \cdot \nabla)\, \boldsymbol{u}(s))$ de (18) en una altra que resulta equivalent sempre que $\boldsymbol{u}$ és solució. En efecte, en aquest cas es compleix $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$, de manera que l'expressió $(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}$ es pot reescriure de la manera següent (on els diversos components d'un vector els indiquem mitjançant subíndexs): $\sum_k u_k \nabla_k u_j = \sum_k \nabla_k (u_k\, u_j)$. Això dóna peu a una integració per parts dins de la integral indicada pel símbol «$*$», la qual cosa transfereix l'operador diferencial ∇_k a $\Gamma(t-s)$.

Com a resultat d'aquestes manipulacions, arribem a una nova equació integral que es pot escriure així:

$$\boldsymbol{u}(t) = \Gamma(t) * \boldsymbol{u}_0 + \int_0^t \nabla_{\boldsymbol{y}} \Gamma(t-s) * \boldsymbol{u}^{(2)}(s)\, \mathrm{d}s, \tag{19}$$

on $\boldsymbol{u}^{(2)}$ representa el tensor d'energia, és a dir, la matriu simètrica formada per tots els productes $u_i u_j$, i $\nabla_{\boldsymbol{y}} \Gamma$ s'aplica sobre el tensor $\boldsymbol{u}^{(2)}$ de la manera següent: $\sum_{jk} (\partial \Gamma_{ij} / \partial y_k) u_k u_j$.

Com es pot veure, en aquesta equació no apareix *cap derivada* de la funció $\boldsymbol{u}$. De totes maneres, i similarment al que hem dit respecte a l'equació (18), la regularitat proporcionada per Γ i $\nabla_{\boldsymbol{y}} \Gamma$ és suficient per a garantir que si $\boldsymbol{u}$ té un mínim de regularitat, per exemple si és contínua i acotada, llavors el fet de ser solució de (19) implica automàticament la regularitat requerida per a poder retornar a les equacions (18) i (14). Encara més, de fet es pot arribar a veure que en aquestes condicions les funcions $\boldsymbol{u}$ i p són infinitament diferenciables.

5.5 Doncs bé, una manera força natural d'intentar acostar-se progressivament a la solució de (19), i per tant de (14), consisteix a procedir per iteració d'acord amb la fórmula següent (com a primera aproximació $\boldsymbol{u}_1$ es pot prendre tranquil-lament $\boldsymbol{u}_1 = 0$):

$$\boldsymbol{u}_m(t) = \Gamma(t) * \boldsymbol{u}_0 + \int_0^t \nabla_{\boldsymbol{y}} \Gamma(t-s) * \boldsymbol{u}_{m-1}^{(2)}(s)\,\mathrm{d}s. \qquad (20)$$

Si tot va bé, la successió $\boldsymbol{u}_m$ convergirà cap a algun límit $\boldsymbol{u}$ i aquest límit complirà (19).

La manera d'obtenir aquesta convergència consisteix a veure que $\boldsymbol{u}_m$ és una successió de Cauchy en un espai funcional adient. A aquest respecte, la formulació precedent, basada en l'equació (19), permet treballar en un espai de la forma $C([0,\tau], C(\bar{\Omega}))$ amb la norma $\sup_{0\le t\le\tau} \|\boldsymbol{u}(t)\|_\infty$ (aquest espai és certament equivalent a $C(\bar{\Omega}\times[0,\tau])$ amb la norma $\sup_{0\le t\le\tau,\,\boldsymbol{x}\in\Omega} |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)|$).

Malauradament, per a aconseguir la convergència resulta inevitable haver de restringir τ a un valor prou petit, de manera que en general aquest mètode no dóna solucions globals (encara que es repeteixi el mateix procediment a partir de $\boldsymbol{u}(\tau)$ i així successivament, en general els valors subseqüents de τ podrien ser cada vegada més petits i la seva suma podria ser finita).

En canvi, el que sí que s'obté és la unicitat de la solució. Essencialment aquesta propietat és conseqüència del mateix mecanisme que mostra que $\boldsymbol{u}_m$ és una successió de Cauchy.

5.6 Per a convertir els arguments precedents en una demostració rigorosa és crucial disposar d'acotacions adients sobre els elements de la matriu Γ i les seves derivades. A aquest respecte, el cas $\Omega = \mathbb{R}^n$ té el gran avantatge que es compta amb certes fórmules explícites per a $\Gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$, les quals van ser obtingudes per Oseen el 1907. Aquestes fórmules permeten arribar al resultat següent, que és degut a Leray (1934) [20: § III] (la part *b* requereix alguns arguments addicionals relacionats amb § 6.2):

1 Teorema *Sigui* $\Omega = \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$. *Si l'estat inicial* $\boldsymbol{u}_0$ *és prou regular, llavors la solució* $\boldsymbol{u}(t)$ *de* (14) *queda determinada (és a dir, existeix i és única) en un interval de temps de la forma* $0 \le t < T(\boldsymbol{u}_0)$, *on* $T(\boldsymbol{u}_0)$ *pot ser infinit, i existeixen unes constants* C_1 *i* C_2 *tals que:*

a) *Si* $T(\boldsymbol{u}_0) < \infty$ *llavors* $\|\boldsymbol{u}(t)\|_\infty > \dfrac{C_1\,\nu}{(\nu(T(\boldsymbol{u}_0) - t))^{1/2}}$ *quan* $t \to T(\boldsymbol{u}_0)$.

b) *Si* $\dfrac{1}{\nu^3}\,\|\boldsymbol{u}_0\|_\infty\,\|\boldsymbol{u}_0\|_2^2 < C_2$ *llavors* $T(\boldsymbol{u}_0) = \infty$.

5.7 Tal com es pot veure en els treballs de Leray de 1933–1934, el mètode que hem exposat es presta a certes variacions que permeten obtenir resultats anàlegs en diverses altres normes [18: § IV; 19: § III; 20: § III]. D'altra banda, ja hem dit que el primer resultat d'aquest tipus va ser obtingut per Oseen el 1910 [12: § II.3].

Notablement, Leray no es va limitar al cas $\Omega = \mathbb{R}^n$, sinó que també va aconseguir aplicar el mètode precedent al cas en què Ω és una regió acotada i convexa de $\mathbb{R}^2$ [19: § III]. En general, el cas $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ presenta una gran dificultat a l'hora d'obtenir informació detallada sobre $\Gamma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)$. El punt clau consisteix a saber tractar el cas en què Ω és un semiespai (un semiplà quan $n = 2$). Per analogia amb altres equacions en derivades parcials més conegudes, cabria esperar que Γ_Ω es pogués construir a partir de les derivades de $\Gamma_{\mathbb{R}^n}$ —la funció matricial que havia donat Oseen el 1907—, però el fet és que aquest paral·lelisme no funciona. Tot i així, Leray encara va reconèixer la solució del problema del semiplà dins d'un altre treball d'Oseen, del 1919 [15]. A partir d'aquí, va poder construir el nucli Γ en el cas d'una regió acotada i convexa de $\mathbb{R}^2$ —utilitzant variable complexa—, i en va poder obtenir les acotacions necessàries per a arribar a un resultat similar al teorema 1.

A partir del 1960 aquest mètode ha estat estès en diverses direccions, especialment per Kirill K. Golovkin i Vsevolod A. Solonnikov, que entre altres coses van eliminar la condició de convexitat sobre Ω i van estendre el tractament al cas tridimensional [32].

D'altra banda, pels volts del 1960 van aparèixer un parell de mètodes que simplificaven una bona part de la feina a l'hora d'obtenir resultats anàlegs al teorema 1 en el cas $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Un d'ells, que comentarem amb més detall a § 10.2, havia estat introduït el 1957 per Andreĭ A. Kiselëv i Olga A. Ladyzhenskaya. L'altre, que es va introduir més o menys per la mateixa època, és el mètode basat en l'anomenada *teoria de semigrups*, del qual ens ocuparem a § 10.3. Aquí només observarem que aquest últim no és gaire diferent del procediment que hem estat considerant en aquesta secció.

5.8 El teorema 1 i els resultats anàlegs a què ens acabem de referir per al cas $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ permeten donar de moment la següent

RESPOSTA 1. *Les equacions de Navier-Stokes determinen el futur proper del fluid, però en general no està clar que en determinin el futur llunyà. D'altra banda, el futur llunyà sí que queda determinat quan l'estat inicial és prou proper al repòs o la viscositat és prou elevada.*

6 La direcció del terme quadràtic. Dissipació d'energia. Globalitat per als moviments plans

6.1 La raó per la qual els mètodes comentats amb anterioritat no aconsegueixen estendre les solucions a temps arbitràriament grans és el caràcter quadràtic del terme no lineal $(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}$.

De fet, el problema es pot donar perfectament amb una simple equació diferencial ordinària. Considerem per exemple el cas següent:

$$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t + \nu\, u \;=\; u^2, \qquad u(0) \;=\; u_0, \tag{21}$$

on u representa ara un nombre que depèn de t, u_0 és el seu valor inicial, que suposem conegut, i ν és un paràmetre positiu que jugarà un paper anàleg a la viscositat d'un fluid. Mitjançant les eines elementals del càlcul infinitesimal es troba fàcilment que la solució de (21) ve donada per la fórmula següent:

$$u(t) \;=\; \frac{\nu}{1 - \mathrm{e}^{\nu t}\,(u_0 - \nu)/u_0}.$$

Examinant aquesta expressió, es veu de seguida que si $u_0 > \nu$ llavors el denominador s'anul·la per a un valor positiu de t, diguem-ne $T(u_0)$. Per a aquest valor de t no està definit el valor de u i menys encara el de la derivada $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$, de manera que la funció precedent només és solució de (21) durant l'interval $[0, T(u_0))$. En canvi, per a $u_0 \le \nu$ el denominador es manté diferent de zero per a tots els valors positius de t, de manera que en aquest cas el temps d'existència $T(u_0)$ és infinit. Aquestes observacions queden recollides en els enunciats següents, els quals mostren un clar paral·lelisme amb els resultats del teorema 1 de § 5.6:

a) Si $u_0 > \nu$ llavors $T(u_0) = \dfrac{1}{\nu}\log\dfrac{u_0}{u_0 - \nu}$,
i $u(t) = \dfrac{\nu}{1 - \mathrm{e}^{-\nu(T(u_0)-t)}} > \dfrac{1}{T(u_0) - t} \to \infty$ quan $t \to T(u_0)$.

b) Si $u_0 \le \nu$ llavors $T(u_0) = \infty$
(i si $u_0 < \nu$ llavors $u(t) \to 0$ quan $t \to \infty$).

Si en l'equació (21) canviem u^2 per $-u^2$ llavors seguim tenint el mateix problema, només que ara els estats inicials problemàtics són $u_0 < -\nu$. Tanmateix, si en lloc de u^2 o $-u^2$ posem $-u|u|$, llavors desapareixen els problemes: el temps d'existència és infinit per a qualsevol u_0. Així, doncs, els termes quadràtics no sempre estan renyits amb l'existència global. En aquest exemple d'una sola equació ordinària està clar que el que importa és el signe del terme en qüestió comparat amb el de u. Quan passem a un espai de dimensió superior, llavors no podem parlar del signe d'un vector, però sí de la seva direcció, de manera que no es tractarà de comparar signes, sinó de comparar direccions. Amb aquesta finalitat resultarà molt adient utilitzar un producte escalar.

Tal com veurem a continuació, les equacions de Navier-Stokes no es veuen pas malament des d'aquest punt de vista.

6.2 En efecte, prenguem l'equació $\partial\boldsymbol{u}/\partial t - \nu\,\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p = -(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u}$ i multipliquem-la escalarment per $\boldsymbol{u}$ en el sentit del producte escalar funcional $\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle$.

Recordeu que això vol dir multiplicar-la escalarment per $\boldsymbol{u}$ en cada punt de Ω i després integrar sobre Ω. Per simplificar l'exposició, a continuació suposarem que la regió Ω és acotada; de tota manera, en cas contrari la condició a l'infinit (11) permet arribar a les mateixes conclusions.

Per començar, de seguida es veu que el terme $\partial\boldsymbol{u}/\partial t$ dóna lloc a la derivada de l'*energia cinètica* total del fluid:

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\partial\boldsymbol{u}/\partial t\ \mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}\int_\Omega |\boldsymbol{u}|^2\,\mathrm{d}V\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}\,\|\boldsymbol{u}\|_2^2\right). \tag{22}$$

D'altra banda, el terme de viscositat $\nu\Delta\boldsymbol{u}$ es pot transformar mitjançant la fórmula de Green (que no és més que una aplicació concreta del teorema de la divergència); aquesta fórmula fa aparèixer una integral sobre $\partial\Omega$, però aquesta integral s'anul·la des del moment que $\boldsymbol{u}$ compleix la condició d'absència de lliscament (14.3):

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\Delta\boldsymbol{u}\ \mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega}\boldsymbol{u}\cdot\nabla_{\perp}\boldsymbol{u}\ \mathrm{d}S - \int_\Omega |\nabla\boldsymbol{u}|^2\,\mathrm{d}V = -\int_\Omega |\nabla\boldsymbol{u}|^2\,\mathrm{d}V. \tag{23}$$

($|\nabla\boldsymbol{u}|^2$ consisteix en la suma dels quadrats de totes les derivades de la forma $\nabla_i u_j$.)

Pel que fa al terme de pressió, la condició d'incompressibilitat $\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0$ porta a una nova aplicació del teorema de la divergència, i el resultat final és nul a causa que el camp de velocitats és paral·lel a la frontera, és a dir, $u_\perp = 0$ a $\partial\Omega$:

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\nabla p\ \mathrm{d}V = \int_\Omega \nabla\cdot(p\,\boldsymbol{u})\ \mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} p\,u_\perp\,\mathrm{d}S = 0 \qquad (24).$$

Dit sigui de passada, això mostra que *els camps solenoïdals i paral·lels a la frontera són ortogonals als camps gradient*. O sigui, que la descomposició de Stokes-Helmholtz que hem considerat a § 3.1 és ben anàloga a les descomposicions ortogonals que la geometria elemental utilitza tot sovint a $\mathbb{R}^n$.

Finalment, veiem què passa amb el terme quadràtic. L'expressió que s'ha d'integrar sobre Ω és el producte escalar de $(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$ per $\boldsymbol{u}$, és a dir, la quantitat $\sum_{i,k} u_k\,(\nabla_k u_i)\,u_i$, que a partir d'ara denotarem $\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}$. Aquesta expressió es pot reescriure d'una manera que simplifica molt les coses. En efecte, aplicant la fórmula per a la derivada d'un quadrat, veiem que

$$\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = \sum_{i,k} u_k\,(\nabla_k u_i)\,u_i = \sum_k u_k\nabla_k(\tfrac{1}{2}\sum_i u_i^2) = \boldsymbol{u}\cdot\nabla(\tfrac{1}{2}\,|\boldsymbol{u}|^2).$$

Així doncs, finalment estem fent el producte escalar de $\boldsymbol{u}$ per un gradient, la qual cosa acabem de veure en el paràgraf precedent que sempre resulta igual a zero:

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\ \mathrm{d}V = \int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\nabla(\tfrac{1}{2}\,|\boldsymbol{u}|^2)\ \mathrm{d}V = 0. \tag{25}$$

Tot plegat, s'arriba a la conclusió que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}\,\|\boldsymbol{u}\|_2^2\right) = -\int_\Omega \nu\,|\nabla\boldsymbol{u}|^2\,\mathrm{d}V \le 0. \tag{26}$$

Així, doncs, l'energia cinètica total del fluid va decreixent a un ritme que està marcat pel coeficient de viscositat ν. Com a cas extrem, l'energia es pot mantenir constant, però això només passa en l'estat de repòs (per a tenir igualtat a (26) cal que $\nabla\boldsymbol{u}$ s'anul·li a tot arreu de Ω, la qual cosa implica que $\boldsymbol{u}$ és constant, i tenint present la condició d'absència de lliscament l'única possibilitat és $\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$). Integrant la relació precedent respecte al temps s'obté l'anomenada *igualtat de l'energia*:

$$\tfrac{1}{2}\,\|\boldsymbol{u}(t)\|_2^2 \;+\; \int_{t_0}^{t}\int_\Omega \nu\,|\nabla\boldsymbol{u}|^2\,\mathrm{d}V\mathrm{d}s \;=\; \tfrac{1}{2}\,\|\boldsymbol{u}(t_0)\|_2^2, \quad \text{per a } \; 0 \le t_0 \le t. \qquad (27)$$

Aquí hem introduït un conveni que utilitzarem a partir d'ara: *si no especifiquem el contrari, en qualsevol expressió de la forma* $\int_{..}^{t}\ldots\,\mathrm{d}s$ *s'entendrà que l'integrand està avaluat a temps* s.

Els arguments precedents van aparèixer per primera vegada en una memòria d'Stokes llegida el 1850 [8: part I, sec. V].

6.3 En particular, prenent $t_0=0$, el resultat precedent ens diu que la norma quadràtica $\|\boldsymbol{u}(t)\|_2$ està acotada per una quantitat independent de $t\ge 0$, a saber, $\|\boldsymbol{u}_0\|_2$. Més exactament,

> Si $\boldsymbol{u}$ és solució en un interval de la forma $0\le t<T$, llavors $\|\boldsymbol{u}(t)\|_2$ està acotada per una quantitat independent de t. (28)

Noteu que *si disposéssim d'un resultat anàleg per a la norma del suprem, llavors se'n deduiria la globalitat de les solucions.* En efecte, segons la part *a*) del teorema 1, si el temps d'existència és finit llavors la norma del suprem ha de créixer sense límit a mesura que ens hi acostem, la qual cosa contradiu l'acotació a què ens estem referint. Però de moment només tenim una acotació en la norma quadràtica, cosa perfectament compatible, per sí sola, amb una manca d'acotació en la norma del suprem.

D'altra banda, també és cert que la igualtat (27) proporciona una acotació no solament de $\|\boldsymbol{u}(t)\|_2$, sinó també de la integral $\int_0^t\int_\Omega|\nabla\boldsymbol{u}|^2\,\mathrm{d}V\mathrm{d}s$. Notablement, en el cas bidimensional aquesta última informació resulta suficient per a deduir l'acotació de la norma del suprem i, per tant, la globalitat de la solució:

2 Teorema *En el cas bidimensional la solució del problema* (14) *queda determinada per a tot* $t\ge 0$.

Aquest resultat va ser demostrat per Leray el 1933 quan $\Omega=\mathbb{R}^2$ [18: § IV], i per Ladyzhenskaya el 1958 quan $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ [26]. En ambdós casos, la demostració es basa de manera crucial en certes desigualtats integrals afins als coneguts teoremes d'immersió de Sergeĭ L. Sobolev, que daten de 1936–1950. Concretament, Leray es va basar en la desigualtat següent [18: pàg. 74], on ω representa un disc arbitrari dins de $\Omega=\mathbb{R}^2$:

$$\Big(\int_{\partial\omega}|f|^2\,\mathrm{d}S\Big)^2 \;\le\; 8\int_\Omega|f|^2\,\mathrm{d}V\int_\Omega|\nabla f|^2\,\mathrm{d}V. \qquad (29)$$

En canvi, Ladyzhenskaya es va basar en la següent [26c: p. 428], on Ω representa una regió acotada però altrament arbitrària de $\mathbb{R}^2$ i f està restringida a anul-lar-se a $\partial\Omega$:

$$\int_\Omega |f|^4 \,\mathrm{d}V \le \frac{1}{2} \int_\Omega |f|^2 \,\mathrm{d}V \int_\Omega |\nabla f|^2 \,\mathrm{d}V. \tag{30}$$

([26c] dóna una constant menys ajustada que $1/2$.) En ambdós casos, especialment el primer, l'obtenció d'aquestes desigualtats es va avançar en el temps als resultats similars d'altres autors.

7 Singularitats i turbulència. Solucions febles

7.1 El teorema precedent dóna resposta positiva a la pregunta 1 en el cas bidimensional, però no en el cas tridimensional. En aquest últim cas. l'únic que sabem de moment és el que diu el teorema 1.

Segons la part *a*) d'aquell teorema, l'existència i la unicitat de solució estan garantides fins a un cert temps T que pot ser finit, i en cas de ser-ho llavors ha d'existir algun punt $\boldsymbol{X} \in \bar{\Omega}$ tal que $|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)|$ pren valors arbitràriament grans quan $(\boldsymbol{x}, t)$ s'acosta a $(\boldsymbol{X}, T)$. Per a referir-se a aquesta situació, es diu que la solució desenvolupa una *singularitat* en el punt $(\boldsymbol{X}, T)$ (val a dir que Oseen ja parla de singularitats en 1910 [13], però la definició que en dóna es refereix al comportament local de $\nabla \boldsymbol{u}$; això és a causa que ell treballava amb una equació integral relacionada amb (18) i no amb (19)).

En lloc de la pregunta 1 podem plantejar-nos, doncs, la pregunta següent, més concreta:

PREGUNTA 2. *És possible que (en el cas tridimensional) les solucions de les equacions de Navier-Stokes desenvolupin singularitats?*

D'altra banda, la part *b*) del teorema 1 garanteix l'absència de singularitats sempre que l'estat inicial sigui prou proper al repòs o la viscositat sigui prou elevada. A aquest respecte, és interessant notar que aquestes últimes condicions són força anàlogues a la condició de petitesa del nombre de Reynolds que en els experiments garanteix l'absència de turbulència (§ 3.3). De fet, atès que $\|\boldsymbol{u}_0\|_2^2$ té dimensions de velocitat al quadrat multiplicat per volum, la quantitat que apareix a l'esquerra de la desigualtat de la part *b*) del teorema 1 és anàloga a un nombre de Reynolds elevat al cub. En el mateix sentit, també és força suggestiva l'analogia que hi ha entre el temps T per sota del qual queda determinada la solució i la distància requerida per al desenvolupament de la turbulència en l'experiment de Reynolds.

Aquestes analogies porten a respondre la pregunta 2 mitjançant una conjectura:

RESPOSTA 2 (CONJECTURA). *Sembla que (en el cas tridimensional) les solucions de les equacions de Navier-Stokes poden desenvolupar singularitats. Aquestes singularitats estarien relacionades amb la turbulència.*

Almenys aquesta era l'opinió que compartien Oseen, Leray i Ladyzhenskaya. Així, ja el 1910 Oseen s'expressava en els termes següents [12: § II.3, pàg. 254]:

> Segons la nostra teoria, sembla doncs versemblant que puguin néixer irregularitats a l'interior d'un fluid viscós i incompressible, fins i tot en el cas en què les forces exteriors i el moviment inicial són completament regulars.

I en el seu llibre del 1927 parlava explícitament de la possible relació entre singularitats i turbulència [16: § 7_8, pàg. 82]:

> L'estudi detallat de les singularitats que poden ocórrer en el moviment d'un fluid viscós també sembla interessant des d'un altre punt de vista. Si poden aparèixer singularitats, llavors és obvi que cal distingir dos tipus de moviment d'un fluid viscós, a saber, els moviments sense singularitats i els moviments amb singularitats. D'altra banda, en hidràulica ja es distingeixen dos tipus de moviments: els moviments laminars i els moviments turbulents. Això porta a suposar que els moviments 'laminars' dels experiments corresponen als moviments 'regulars' de la teoria, i que els moviments 'turbulents' dels experiments corresponen als moviments 'irregulars' de la teoria. Només futures investigacions permetran esbrinar si aquesta suposició correspon o no a la veritat.

Pel que fa a Leray, només cal dir que va adoptar la denominació de *solucions turbulentes* per a referir-se a una noció generalitzada de solució que, com veurem més avall, permetria anar més enllà d'alguns tipus de singularitats. De fet, Leray es va pronunciar explícitament a favor de la conjectura que les solucions poden desenvolupar singularitats (la «raó» a què al·ludeix la veurem de seguida, a § 7.2) [20: pàg. 193]:

> Però a partir d'aquest fet no sembla pas possible de deduir que el moviment resti ell mateix regular; jo he indicat fins i tot una raó que em fa creure en l'existència de moviments que esdevenen irregulars al cap d'un temps finit; malauradament, però, no he aconseguit construir un exemple d'aquest tipus de singularitat.

Finalment, pel que fa a Ladyzhenskaya, podem citar el text [30: § 8, pàg. 273]:

> Però no es pot excloure la possibilitat que aquesta regularitat es destrueixi en algun moment... En tals moments catastròfics la solució es pot ramificar... Nosaltres creiem que tal ramificació de la solució és possible en les equacions de Navier-Stokes

7.2 En un intent d'obtenir un exemple concret en què es desenvolupés una singularitat, Leray [18: § III.9, pàg. 60–61] va considerar les anomenades *solucions autosimilars.* Aquesta denominació s'aplica a les solucions de la forma

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \phi(t)\,\boldsymbol{U}(\phi(t)\boldsymbol{x}), \qquad p(\boldsymbol{x},t) = \phi(t)^2\,P(\phi(t)\boldsymbol{x}). \tag{31}$$

Introduint aquestes expressions en les equacions (14.1), (14.2) i (14.4), i aplicant un argument de separació de variables, es veu de seguida que la funció ϕ hauria de tenir la forma

$$\phi(t) = \frac{1}{(2\lambda(T-t))^{1/2}}, \tag{32}$$

amb λ constant, i que les funcions $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X})$ i $P(\boldsymbol{X})$ haurien de satisfer les equacions següents, on apareix la mateixa constant λ:

$$\nu\,\Delta\boldsymbol{U} - \lambda\,((\boldsymbol{X}\cdot\nabla)\boldsymbol{U} + \boldsymbol{U}) - \nabla P = (\boldsymbol{U}\cdot\nabla)\boldsymbol{U}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{U} = 0, \quad \boldsymbol{U}|_\infty = \boldsymbol{0}. \tag{33}$$

Si aquestes equacions tinguessin una solució no nul·la per a alguna $\lambda > 0$, llavors les fórmules (31) i (32) donarien una solució de (14) definida per a $t < T$, la qual compliria $\|\boldsymbol{u}(t)\|_\infty = (2\lambda(T-t))^{-1/2}\,\|\boldsymbol{U}\|_\infty$ i tindria una singularitat en el punt $(\boldsymbol{0}, T)$. A aquest respecte Leray va observar que, mitjançant uns càlculs similars als de § 6.2 (i la utilització d'hipòtesis adients sobre el comportament de $\boldsymbol{U}$ i P a l'infinit), el producte escalar de l'equació (33.1) per $\boldsymbol{U}$ dóna la relació següent:

$$\nu\int_\Omega |\nabla\boldsymbol{U}|^2\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\,\lambda\,(n-2)\int_\Omega |\boldsymbol{U}|^2\,\mathrm{d}V. \tag{34}$$

En el cas $n=2$ aquesta relació implica $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{0}$, la qual cosa mostra la impossibilitat de singularitats d'aquest tipus, en concordança amb el teorema 2.

En el cas $n=3$ la possibilitat d'aquest tipus de singularitats ha restat oberta fins al 1996, en què Jindřich Nečas, Michael Růžička i Vladimír Šverák van demostrar la impossibilitat d'una solució no nul·la de (33) quan s'imposen certes condicions força naturals, com per exemple que $\boldsymbol{U}$ sigui acotada i el seu quadrat sigui integrable [47]. Un punt crucial de la demostració consisteix a veure que si $\boldsymbol{U}, P, \lambda$ compleixen (33) llavors $\Pi = P + \frac{1}{2}\,|\boldsymbol{U}|^2 + \lambda\,\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{U}$ compleix una certa desigualtat diferencial que implica un principi del màxim: per a qualsevol regió acotada ω, el màxim de Π a $\overline{\omega}$ s'assoleix sempre a $\partial\omega$.

7.3 Davant la possibilitat que les solucions de les equacions de Navier-Stokes desenvolupin singularitats, és natural insistir en la pregunta següent:

PREGUNTA 3. *Es pot donar sentit a les equacions de Navier-Stokes per a camps de velocitats que continguin singularitats?*

En efecte, la presència d'una singularitat en el punt $(\boldsymbol{x}, t)$ implica que en aquest punt no està ben definida la velocitat $\boldsymbol{u}$ (o potser està definida però en tot cas no és contínua) i menys encara les seves derivades $\nabla\boldsymbol{u}$, $\Delta\boldsymbol{u}$ i $\partial\boldsymbol{u}/\partial t$. Per tant, en els punts singulars deixen de tenir sentit els diversos termes de les equacions diferencials que se suposava que havien de determinar el moviment futur del fluid.

A aquest respecte cal recordar que a § 5 hem substituït les equacions diferencials per unes equacions integrals, l'equació (19) o alternativament l'equació (18), les quals tenen sentit per a una classe més àmplia de funcions $\boldsymbol{u}$.

De fet, les integrals que apareixen en aquestes equacions poden tenir sentit fins i tot en presència d'alguns tipus de singularitats. Tanmateix les equacions integrals (18) i (19) han estat deduïdes de les mateixes equacions diferencials que diem que perden sentit en presència de singularitats. D'altra banda, aquestes equacions diferencials provenen d'unes relacions integrals que també tenen sentit per a una classe més àmplia de funcions $\boldsymbol{u}$, a saber, les equacions (7) i (4) de § 2, les quals fan balanç de la quantitat de moviment i de la quantitat de massa contingudes en una part arbitrària $\omega \subset \Omega$. Davant de tot això, resulta natural preguntar-se si les equacions integrals (18) o (19) poden ser obtingudes directament a partir de les equacions integrals de balanç (7) i (4), sense passar per les equacions diferencials. D'aquesta qüestió se'n va ocupar el mateix Oseen en un dels seus articles del 1910 [14], on va mostrar la manera de passar d'unes equacions integrals a les altres i viceversa.

Notablement, un dels passos intermedis d'aquesta deducció correspon essencialment [14: eq. (10), pàg. 10] a una noció generalitzada de solució que després va ser adoptada per Leray i que actualment constitueix una eina habitual en l'estudi de qualsevol tipus d'equacions diferencials en derivades parcials. Aquesta generalització de la noció de solució admet diverses variants, i la terminologia que s'utilitza en aquest respecte també és força variada: segons els autors i la variant concreta que es consideri es parla de solucions febles, solucions generalitzades, solucions variacionals o solucions distribucionals. De totes maneres, la idea essencial és sempre la mateixa.

7.4 Per a exposar aquesta idea començarem per un exemple senzill que forma part del problema que estem considerant, a saber l'equació diferencial que expressa la incompressibilitat del fluid:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{6}$$

La noció clàssica de solució requereix que certes derivades parcials —en aquest cas $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial y$ i $\partial w/\partial z$— estiguin ben definides en cada punt de Ω. Per a passar a la noció feble es multiplica l'equació en qüestió per una *funció de prova* ϕ i el resultat s'integra sobre la regió Ω. El pas crucial és el que ve a continuació, que consisteix a integrar per parts per tal de transferir les derivades a la funció de prova. En el cas de l'equació (6), aquesta operació pren la forma següent:

$$\int_\Omega (\nabla \cdot \boldsymbol{u})\, \phi \,\mathrm{d}V \;=\; \int_{\partial\Omega} u_\perp \phi \,\mathrm{d}S \;-\; \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \nabla\phi \,\mathrm{d}V.$$

A les funcions de prova se'ls demana que siguin prou regulars perquè tinguin sentit les noves integrals a què dóna lloc la integració per parts; de fet, tot sovint es treballa amb funcions de prova infinitament derivables. D'altra banda, també se'ls acostuma a demanar que tinguin suport compacte dins de l'obert Ω; això fa que s'anul·lin les integrals sobre $\partial\Omega$ a què dóna lloc la integració per parts, i en el cas d'una regió Ω no acotada també evita d'haver de preocupar-se del que passa a l'infinit. Així, doncs, tot sovint es considera com a conjunt de funcions de prova el conjunt $\mathcal{D}(\Omega)$ que ja hem introduït a § 4.2. En el cas de l'equació (6), les operacions que hem descrit desemboquen en la relació següent:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{u} \cdot \nabla\phi \; \mathrm{d}V = 0, \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{35}$$

Doncs bé, una solució feble de l'equació diferencial (6) vol dir simplement una funció $\boldsymbol{u}$ que compleixi la relació (35). Com es pot veure, aquesta relació no requereix que $\boldsymbol{u}$ sigui diferenciable, sinó solament que sigui integrable sobre subconjunts compactes de Ω, és a dir, sobre qualsevol part acotada de Ω que no arribi a tocar $\partial\Omega$. El procés que hem seguit implica immediatament que totes les solucions clàssiques són també solucions febles. D'altra banda, si $\boldsymbol{u}$ és una solució feble, és a dir, satisfà (35), i a més té la diferenciabilitat que demana la noció clàssica, llavors les operacions que hem fet més amunt es poden fer en ordre invers tot arribant a la conclusió que $\boldsymbol{u}$ és també una solució clàssica. A aquest respecte és crucial que la relació integral (35) es compleixi per a una funció de prova arbitrària (i que el conjunt de funcions de prova sigui prou ric). De fet, el compliment de l'equació diferencial (6) en cada punt $\boldsymbol{x}$ d' Ω s'obté mitjançant un procés límit en què les funcions de prova ϕ es concentren en el punt $\boldsymbol{x}$.

En l'esperit d'Oseen, també és interessant comparar l'equació integral (35) amb la que ha estat el punt de partida per a deduir l'equació diferencial (6), a saber, l'equació integral (4):

$$\text{(4)} \qquad \int_{\partial\omega} u_{\perp} \mathrm{d}S = 0, \qquad \forall\, \omega \in \mathcal{P}(\Omega),$$

Aquesta relació correspondria al cas en què la funció de prova ϕ fos la funció característica de la subregió ω. Aquesta funció no pertany pas a $\mathcal{D}(\Omega)$, però pot ser aproximada de manera adient per funcions que pertanyen a $\mathcal{D}(\Omega)$, la qual cosa permet passar de (35) a (4). D'altra banda, també és possible passar de (4) a (35). Tal com va observar Oseen, això es pot aconseguir mitjançant un procediment basat en una discretització segons una quadrícula molt fina; partint de (35), la idea central consisteix a aproximar les derivades parcials de ϕ per diferències finites i efectuar una reordenació que fa aparèixer el que seria una aproximació per diferències finites de la divergència de $\boldsymbol{u}$; tanmateix aquesta aproximació no es compara amb el valor puntual de $\nabla \cdot \boldsymbol{u}$, sinó que es relaciona directament amb la integral de flux a través de la frontera de la corresponent cel·la de la quadrícula; finalment, la suma d'aquestes integrals dóna lloc a (4).

7.5 Considerem ara el cas de l'equació diferencial corresponent a la segona llei de Newton. Tal com hem anat fent des de § 2.6, suposarem $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$:

$$\text{(9)} \qquad \partial\boldsymbol{u}/\partial t = \nu\,\Delta\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} - \nabla p, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega.$$

Aquest cas és una mica més complicat que l'anterior. D'una banda, l'equació (9) té caràcter vectorial, la qual cosa porta a considerar funcions de prova vectorials que operin sobre els diversos termes de l'equació mitjançant el producte escalar de $\mathbb{R}^n$ (seguit de la integració). En endavant, les anomenarem $\boldsymbol{\psi}$. D'altra banda, resulta interessant restringir aquestes funcions de prova vectorials a ser solenoïdals. D'aquesta manera s'aconsegueix que el pas a la relació integral que defineix les solucions febles comporti l'eliminació de la pressió.

D'altra banda, l'equació (9) combina derivades espacials i temporals, la qual cosa porta a considerar funcions de prova que depenguin de $\boldsymbol{x}$ i t. A aquest respecte, nosaltres optarem per una variant en què les funcions de prova no s'anul·laran en els límits d'integració de la variable t. Això tindrà l'efecte d'incorporar la condició inicial (14.5) en la mateixa relació integral que més avall defineix les solucions febles de (9).

De fet, els càlculs que porten de (9) cap a la formulació feble són bastant semblants als que hem fet a § 6.2. La diferència essencial és que allà multiplicàvem per la mateixa funció $\boldsymbol{u}$, mentre que aquí multipliquem per la funció de prova $\boldsymbol{\psi}$. Aquests càlculs porten a la relació següent:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{\psi}(t)\,\mathrm{d}V &= \int_\Omega \boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\psi}(0)\,\mathrm{d}V \\ &\quad + \int_0^t\int_\Omega\Big(\boldsymbol{u}\cdot(\partial\boldsymbol{\psi}/\partial t) - \nu\,\nabla\boldsymbol{u}{:}\nabla\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\psi}\Big)\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}s, \\ &\qquad \forall\boldsymbol{\psi}\in\widetilde{\mathcal{D}}_\sigma(\Omega),\quad \forall t\in[0,T),\end{aligned}\tag{36}$$

on usem les notacions $\nabla\boldsymbol{u}{:}\nabla\boldsymbol{v} = \sum_{i,k}\nabla_k u_i\,\nabla_k v_i$ i $\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} = \sum_{i,k} v_k\,\nabla_k u_i\,w_i$, així com el conveni sobre $\int_{..}^t \ldots\,\mathrm{d}s$ que hem adoptat al final de § 6.2. A partir d'aquí, encara es pot fer una segona integració per parts que acabi de transferir totes les derivades a la funció de prova (en l'últim terme s'utilitza l'equació $\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$). El resultat d'aquesta segona integració per parts és el següent:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{\psi}(t)\,\mathrm{d}V &= \int_\Omega \boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\psi}(0)\,\mathrm{d}V \\ &\quad + \int_0^t\int_\Omega\Big(\boldsymbol{u}\cdot(\partial\boldsymbol{\psi}/\partial t) - \nu\,\boldsymbol{u}\cdot\Delta\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\psi}\cdot\boldsymbol{u}\Big)\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}s, \\ &\qquad \forall\boldsymbol{\psi}\in\widetilde{\mathcal{D}}_\sigma(\Omega),\quad \forall t\in[0,T),\end{aligned}\tag{37}$$

Si $\boldsymbol{u}$ és prou regular (i compleix l'equació $\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$), llavors es pot fer el recorregut invers des de (37) a (9). A aquest respecte només indicarem que la pressió apareix a conseqüència de la descomposició d'Stokes-Helmholtz (§ 3.1) i del seu caràcter ortogonal. Respecte de l'equivalència entre (9) i (36) o (37), també és interessant observar que aquestes últimes equacions es poden considerar una expressió de l'anomenat *principi dels treballs virtuals*, que la mecànica clàssica ha vingut utilitzant des del segle XVIII en connexió amb la segona llei de Newton.

La diferència principal entre les relacions (36) i (37) és que en aquesta última no hi apareix cap derivada de $\boldsymbol{u}$. Això resulta útil en alguns moments, però per a certes finalitats (per exemple, per a donar sentit a la condició d'absència de lliscament) convé suposar una mica més de regularitat pel que fa a la dependència de $\boldsymbol{u}$ respecte a $\boldsymbol{x}$. D'altra banda, tampoc no interessa demanar que $\boldsymbol{u}$ sigui derivable en sentit clàssic, ja que això no permetria considerar singularitats. Davant d'aquesta situació, resulta molt adient la noció de *derivada feble* (que Leray anomenava *quasiderivada*): la derivada feble d'una funció f respecte a x_k es pot definir simplement com una funció g tal que f és solució feble de l'equació $\nabla_k f = g$. Aplicant aquesta idea, nosaltres suposarem que existeixen unes funcions $\nabla_k u_i$, que potser no es poden identificar exactament amb les derivades clàssiques de u_i respecte a x_k, però en tot cas estan relacionades amb $\boldsymbol{u}$ de la manera següent:

$$\int_0^t \int_\Omega u_i \,(\nabla_k \phi)\; \mathrm{d}V\, \mathrm{d}s \;=\; -\int_0^t \int_\Omega (\nabla_k u_i)\, \phi\; \mathrm{d}V\, \mathrm{d}s, \qquad \forall \phi \in \widetilde{\mathcal{D}}(\bar\Omega), \quad \forall t \in [0,T). \tag{38}$$

En demanar que es compleixi per a totes les ϕ de $\widetilde{\mathcal{D}}(\bar\Omega)$, i no només les de $\widetilde{\mathcal{D}}(\Omega)$, aquesta relació no solament afirma que $\nabla_k u_i$ és la derivada feble de u_i respecte a x_k, sinó que també incorpora la condició d'absència de lliscament (14.3).

7.6 Tot reunint els diversos elements que hem introduït al llarg de § 7.4–7.5, nosaltres definirem una *solució feble* de (14) a l'interval $[0,T)$ com a consistent en un camp vectorial $\boldsymbol{u}$ i un camp tensorial $\nabla\boldsymbol{u}$ (de components $\nabla_k u_i$) els quals depenen de $t \in [0,T)$ i compleixen per a tot valor de t en l'interval $[0,T)$ les condicions següents:

a) $|\boldsymbol{u}|^2$ és integrable sobre Ω,
i la norma $\|\boldsymbol{u}(s)\|_2$ està acotada independentment de $s \in [0,t]$.

b) $|\nabla\boldsymbol{u}|^2 = \sum_{i,k} |\nabla_k u_i|^2$ és integrable sobre $\Omega\times[0,t]$.

c) Es compleix la relació (38).

d) Es compleix la relació (35).

e) Es compleix la relació (36), o alternativament la relació (37).

Malgrat que en principi la relació (37) és més general que la (36), es pot demostrar que en presència de *a*)–*d*) aquestes dues relacions són ben bé equivalents. D'altra banda, tant (36) com (37) són equivalents a sengles versions aparentment més febles en les quals la funció de prova $\boldsymbol{\psi}$ no depèn de t (vegeu per exemple [23: Lemma 4.1]).

Tal com s'ha vist més amunt, les equacions (38), (35), (36) i (37) tradueixen d'alguna manera les equacions (14.1) i (14.2) junt amb la condició d'absència de lliscament (14.3) i la condició inicial (14.5). D'altra banda, les condicions d'integrabilitat *a*) i *b*) són lleugerament més fortes del que cal per a donar sentit a les equacions (35)–(38). En efecte, atès que les funcions de prova s'anul·len fora d'un acotat, n'hi hauria prou amb una condició d'integrabilitat sobre acotats. Tanmateix, en demanar la integrabilitat global, es pot entendre que les condicions *a*) i *b*) contenen una versió generalitzada de la condició a l'infinit (14.4).

En tot cas, fent ús de la noció de regularitat a l'infinit que hem introduït a § 2.5, es pot afirmar que si la funció $\boldsymbol{u}$ és prou regular, llavors el fet de ser solució de (14) en sentit feble implica que també n'és solució en sentit clàssic.

Tot plegat proporciona una resposta positiva a la pregunta 3:

RESPOSTA 3. *La noció de solució feble dóna sentit a les equacions de Navier-Stokes per a camps de velocitat que poden contenir singularitats.*

Més amunt ja hem observat que les equacions integrals (18) o (19) també poden ser aplicades a camps de velocitat amb algun tipus de singularitats. Tanmateix aquelles equacions integrals suposen la construcció prèvia del nucli Γ que resol el problema lineal. Tal com hem dit a § 5.7, en termes generals aquesta construcció presenta certes dificultats (vegeu però § 10.3). En canvi, la noció de solució feble no depèn de tal construcció.

7.7 Independentment de la utilitat de la noció de solució feble, la possibilitat que les solucions desenvolupin singularitats també planteja dubtes sobre la validesa de les equacions, és a dir, sobre la seva adequació a la realitat. En efecte, cal recordar que, a més de la segona llei de Newton, l'equació diferencial (9) incorpora una altra llei física menys fonamental, la qual està expressada per l'equació (8). Aquesta llei postula una relació lineal entre el tensor d'esforços T i el tensor de gradients $\nabla \boldsymbol{u}$. Els fluids que la compleixen es diuen *newtonians*, ja que el primer a modelar la fricció dels fluids mitjançant una relació lineal d'aquest estil va ser el mateix Newton. Tanmateix cal pensar que aquesta relació lineal potser només és vàlida de manera aproximada quan els gradients $\nabla \boldsymbol{u}$ són prou petits, i que els gradients grans —que són inevitables quan ens acostem a una singularitat— podrien comportar desviacions respecte a la linealitat.

Doncs bé, si aquestes desviacions van en una certa direcció, llavors es pot demostrar que les solucions no arriben a desenvolupar singularitats; concretament, aquest és el cas si se suposa una llei de la mateixa forma que (8) però μ no és una constant, sinó que creix prou de pressa amb $|\nabla \boldsymbol{u}|$. Una vegada més, aquesta observació es troba present ja en el treball de Leray [19: § III.10, pàg. 61–62]. Posteriorment, diversos autors han considerat una dependència del tipus $\mu = \mu_0 + \varepsilon\, |\nabla \boldsymbol{u}|^{\alpha}$ ($\mu_0, \varepsilon > 0$) i han estudiat a partir de quin valor de α es pot garantir l'existència, la unicitat i la globalitat de les solucions. Aquesta línia de recerca va ser iniciada el 1966 per Ladyzhenskaya, que va requerir $\alpha \geq 1/2$ (per a $n = 3$) [28]. Posteriorment, el 1993, Hamid Bellout, Frederick Bloom i Jindřich Nečas van aconseguir rebaixar aquesta condició a $\alpha \geq 1/5$ [46].

Aquest model no newtonià no té interès com a model realista, atès que en la pràctica molts fluids s'ajusten prou bé al model newtonià, i els que se n'aparten requereixen models bastant més complicats que el precedent. De totes maneres, els resultats esmentats suggereixen una nova estratègia per a tractar el cas newtonià, és a dir, les equacions de Navier-Stokes que veníem considerant fins ara. La idea consisteix a considerar una modificació com la que acabem de comentar, que doni existència, unicitat i globalitat, i intentar acostar-nos al cas newtonià tot mantenint aquestes propietats. Per exemple, en el cas precedent es tractaria de considerar el límit $\varepsilon \to 0$.

D'altra banda, de cara a resoldre el cas newtonià, tant se val la modificació de més amunt com altres opcions encara menys realistes, però més fàcils de tractar matemàticament. Aplicant aquesta idea, Leray va aconseguir demostrar que el problema d'evolució per a les equacions de Navier-Stokes sempre té alguna solució en sentit feble, la qual està definida per a temps arbitràriament grans; el que no va poder garantir és que aquesta solució feble global sigui única. Aquestes solucions febles, globals però no necessàriament úniques, són les que Leray anomenava solucions *turbulentes.* De fet, Leray va desenvolupar dos mètodes diferents d'aquest tipus; un d'ells el va aplicar al cas en què Ω és una regió acotada i convexa de $\mathbb{R}^2$ [19: § IV] —on ara ja sabem que es disposa d'un resultat d'existència, unicitat i globalitat (§ 6.3)— i l'altre el va aplicar al cas $\Omega = \mathbb{R}^3$ [20: § V]. A la secció que segueix descriurem el segon d'aquests dos mètodes.

8 Solucions globals, però no necessàriament úniques

8.1 Tal com hem dit, es tracta de reemplaçar el problema (14) per un problema lleugerament modificat en què es pugui demostrar l'existència, la unicitat i la globalitat de solució; aquest problema modificat ha de dependre d'un paràmetre que permeti acostar-se cada vegada més al problema (14). Concretament, Leray va considerar un problema de la forma següent, en què el paràmetre és ε i l'acostament al problema (14) correspondrà al límit $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{gathered} \partial \boldsymbol{u}/\partial t - \nu\,\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p \;=\; -((R_\varepsilon * \boldsymbol{u})\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u}, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{u} \;=\; 0, \\ \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} \;=\; \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{u}|_\infty \;=\; \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{u}|_{t=0} \;=\; R_\varepsilon * \boldsymbol{u}_0. \end{gathered} \tag{39$_\varepsilon$}$$

Com es pot veure, aquest problema només difereix de (14) que en un parell de llocs hem introduït un cert operador integral de nucli R_ε. Aquest operador és el que avui dia en diem un operador de *regularització*: $R_\varepsilon * f$ té sentit per a funcions f que potser no són gaire regulars (només cal que f sigui integrable en un entorn de cada punt) però el resultat sempre és una funció infinitament derivable que a més s'acosta a f quan $\varepsilon \to 0$ (aquesta convergència és certa en moltes normes diferents). El lloc de la funció f el pot ocupar també un camp vectorial, cas en el qual s'entén que $R_\varepsilon *$ actua separadament sobre cada component. Tal com indica Leray, les propietats precedents es poden aconseguir fàcilment prenent

$$R_\varepsilon(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \;=\; \frac{c_n}{\varepsilon^n}\,\varrho\left(\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{\varepsilon}\right), \tag{40}$$

on $\varrho(r)$ representa una funció infinitament derivable $[0,\infty)\to\mathbb{R}$ que sigui nul-la per a $r\ge 1$ i positiva per a $0\le r<1$ (per exemple $\varrho(r)=\exp(-(1-r^2)^{-1})$ per a $r<1$), i c_n és la constant que fa que resulti $\int_{\mathbb{R}^n} R_\varepsilon(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,dV(\boldsymbol{y}) = 1$. A partir d'aquesta construcció es dedueix fàcilment que R_ε compleix concretament les propietats següents, en les quals f representa una funció arbitrària (mentre tinguin sentit els objectes que es consideren en cada cas) i C_ε és una constant que depèn de ε:

$$\|R_\varepsilon * f\|_\infty \;\le\; C_\varepsilon\,\|f\|_2, \tag{41}$$

$$\|R_\varepsilon * f - f\|_2 \;\to\; 0 \quad \text{quan } \varepsilon\to 0, \tag{42}$$

$$\|R_\varepsilon * f\|_2 \;\le\; \|f\|_2, \tag{43}$$

$$\|R_\varepsilon * f\|_\infty \;\le\; \|f\|_\infty, \tag{44}$$

$$\nabla_k(R_\varepsilon * f) \;=\; R_\varepsilon * (\nabla_k f). \tag{45}$$

En particular, la propietat (41) recull un aspecte del caràcter regularitzant de $R_\varepsilon *$ que serà crucial per a nosaltres: en general, un valor finit de la norma quadràtica $\|f\|_2$ és perfectament compatible amb un valor infinit de la norma del suprem $\|f\|_\infty$ (la qual cosa correspon a la noció de singularitat que hem donat a § 7.1); en canvi, (41) assegura que $\|R_\varepsilon * f\|_\infty$ és finita sempre que ho sigui $\|f\|_2$.

Les consideracions que estem fent es refereixen especialment al cas $\Omega=\mathbb{R}^3$. Per tal d'estendre-les al cas $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ només és qüestió de definir adientment l'operador R_ε (vegeu per exemple [42]) i de tenir acotacions adients per a les solucions del problema lineal (15), el mateix que hem consderat a § 5.7. En efecte, el problema $(39)_\varepsilon$ serà resolt mitjançant un mètode anàleg al de § 5.

8.2 Utilitzant les propietats (43)–(45), es comprova fàcilment que el problema $(39)_\varepsilon$ admet el mateix tractament que en § 5 i § 6 hem aplicat al problema (14). Això proporciona resultats completament anàlegs al teorema 1 i a la igualtat de l'energia (27). La solució de $(39)_\varepsilon$ així obtinguda, la denotarem $\boldsymbol{u}^\varepsilon$. Amb aquesta notació, la igualtat de l'energia la podem escriure així:

$$\tfrac12\,\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(t)\|_2^2 + \int_{t_0}^{t}\int_\Omega \nu\,|\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}s \;=\; \tfrac12\,\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(t_0)\|_2^2, \quad \text{per a } 0\le t_0\le t. \tag{46}$$

Així com en el cas del problema (14) els resultats que acabem d'esmentar no eren suficients per a deduir la globalitat de la solució, ara sí que és possible arribar a aquesta conclusió. En efecte, gràcies a la propietat (41), l'acotació (46) amb $t_0 = 0$ permet deduir l'acotació següent independent de $t \geq 0$: $\|R_\varepsilon * \boldsymbol{u}^\varepsilon(t)\|_\infty \leq C_\varepsilon \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(0)\|_2$, i introduint aquesta acotació en l'equació integral anàloga a (19) es dedueix que $\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(t)\|_\infty$ es manté acotada per a tot $t \geq 0$. D'acord amb la part *a*) del teorema 1 (aplicat al problema $(39)_\varepsilon$), això permet concloure que la solució $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ està definida per a tot temps $t \geq 0$. Així, doncs, a diferència de (14), el problema $(39)_\varepsilon$ té existència, unicitat i globalitat de solució.

8.3 Vist això, ara es tracta de considerar el límit $\varepsilon \to 0$ i veure: *a*) si $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ tendeix cap a algun límit, i *b*) si podem dir que aquest límit compleix en algun sentit les equacions de Navier-Stokes.

Pel que fa a la part *a*), ja avisem que no s'obtindrà pas un límit únic de $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ quan ε s'acosta a zero d'una manera arbitrària, sinó només quan ho fa segons certes successions ε_n $(n \to \infty)$; el que no es pot assegurar és que el límit de $\boldsymbol{u}^{\varepsilon_n}$ sigui independent de la successió ε_n. Ja es veu venir, doncs, que aquest mètode quedarà lluny de proporcionar un resultat d'unicitat.

Pel que fa a la part *b*), en principi la idea consisteix a considerar l'equació de la qual $\boldsymbol{u}^{\varepsilon_n}$ és solució i prendre límits quan $n \to \infty$, és a dir, quan $\varepsilon_n \to 0$. Tanmateix quan parlem d'equacions diferencials això és delicat: en efecte, en general és perfectament possible que $\boldsymbol{u}^{\varepsilon_n}$ tingui un límit però les seves derivades, per exemple $\partial \boldsymbol{u}^{\varepsilon_n}/\partial t$, no en tinguin cap. Això es resol, almenys parcialment, mitjançant l'ús de la noció de solució feble.

8.4 Les funcions $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ que hem obtingut més amunt són solucions de $(39)_\varepsilon$ en sentit clàssic (§ 5.4) i per tant també ho són en sentit feble. Segons hem definit a § 7.6, això significa que en tot instant $t \in [0, \infty)$ es compleixen les condicions següents: $|\boldsymbol{u}^\varepsilon|^2$ és integrable sobre Ω amb $\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(s)\|_2$ acotada independentment de $s \in [0, t]$; $|\nabla \boldsymbol{u}^\varepsilon|^2$ és integrable sobre $\Omega \times [0, t]$;

$$\begin{aligned}\int_\Omega \boldsymbol{u}^\varepsilon(t) \cdot \boldsymbol{\psi}(t)\,\mathrm{d}V &= \int_\Omega (R_\varepsilon * \boldsymbol{u}_0) \cdot \boldsymbol{\psi}(0)\,\mathrm{d}V \\ &\quad + \int_0^t \int_\Omega \Big(\boldsymbol{u}^\varepsilon \cdot (\partial \boldsymbol{\psi}/\partial t) + \nu\, \boldsymbol{u}^\varepsilon \cdot \Delta \boldsymbol{\psi} + (R_\varepsilon * \boldsymbol{u}^\varepsilon) \cdot \nabla \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{u}^\varepsilon\Big)\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}s, \\ &\qquad \forall \boldsymbol{\psi} \in \widetilde{\mathcal{D}}_\sigma(\Omega), \quad \forall t \geq 0; \end{aligned} \tag{47}$$

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}^\varepsilon(t) \cdot \nabla \phi\,\mathrm{d}V = 0, \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \forall t \geq 0; \tag{48}$$

i finalment

$$\int_0^t \int_\Omega u_i^\varepsilon\,(\nabla_k \phi)\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}s = -\int_0^t \int_\Omega (\nabla_k u_i^\varepsilon)\,\phi\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}s, \qquad \forall \phi \in \widetilde{\mathcal{D}}(\bar{\Omega}), \quad \forall t \geq 0. \tag{49}$$

8.5 Per a establir l'existència de les successions $\varepsilon_n \to 0$ que donen un límit a $\boldsymbol{u}^{\varepsilon_n}$ s'utilitzen uns resultats similars al que en $\mathbb{R}$ assegura que tota successió acotada té una subsuccessió convergent (teorema de Bolzano-Weierstrass). En els espais funcionals no val exactament el mateix, però es disposa de certes generalitzacions. Entre les que ens interessen, la més clàssica és deguda a David Hilbert (1906) i es basa en la noció de *convergència feble* (de funcions de quadrat integrable). Nosaltres usarem la definició següent: una successió de funcions f_n definides sobre una regió Ω és feblement convergent cap a una certa funció límit f quan es compleix

$$\int_\Omega f_n\,\phi\,\mathrm{d}V \to \int_\Omega f\,\phi\,\mathrm{d}V, \qquad \forall\phi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{50}$$

En lloc d'això, sovint es demana una condició anàloga i equivalent en la qual la funció de prova ϕ recorre tot l'espai $L_2(\Omega)$. Nosaltres hem preferit quedar-nos amb la versió (50), ja que fa més evident la relació amb la noció de solució feble. Al costat de la noció de convergència feble, tenim la noció de *convergència forta*: la successió f_n es diu que és que és fortament convergent cap a f quan es compleix $\|f_n - f\|_2 \to 0$; tal com indica la terminologia, la convergència forta implica la convergència feble, però l'invers no és cert. Doncs bé, el principi de selecció de Hilbert afirma que si f_n és una successió de funcions que tenen norma quadràtica acotada independentment de n, llavors es pot extraure una subsuccessió f_n' que és convergent en sentit feble.

De cara a aplicar aquest principi i altres de similars al nostre problema, resulta crucial disposar d'acotacions sobre $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ que no depenguin de ε. Aquestes acotacions les proporciona la igualtat de l'energia (46). En efecte, prenent $t_0 = 0$ i tenint en compte que $\boldsymbol{u}^\varepsilon(0) = R_\varepsilon * \boldsymbol{u}_0$, la propietat (43) permet deduir-ne les acotacions següents independents de ε:

$$\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(t)\|_2 \le \|\boldsymbol{u}_0\|_2, \tag{51}$$

$$2\,\nu \int_0^t \int_\Omega |\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon|^2\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}s \le \|\boldsymbol{u}_0\|_2^2. \tag{52}$$

A partir de (51), el principi de selecció de Hilbert ens diu immediatament que existeix alguna successió $\varepsilon_n \to 0$ tal que $\boldsymbol{u}^{\varepsilon_n}(t)$ convergeix en sentit feble. Tanmateix, procedint d'aquesta manera la successió ε_n pot dependre de t, la qual cosa no ens interessa; en efecte, volem que el límit depengui de t no d'una manera arbitrària, sinó d'acord amb una certa equació diferencial (entesa en sentit feble). D'altra banda, tampoc no és gaire difícil aconseguir que la successió ε_n sigui independent de t. En aquest sentit, resulta decisiu el fet que els valors de $\boldsymbol{u}^\varepsilon(t)$ per a diferents instants t estan lligats per la relació (47) (la formulació feble de l'equació diferencial corresponent a ε). En efecte, mitjançant un principi de selecció no gaire diferent del de Hilbert —el qual ja era conegut per Stefan Banach (1923)— es pot veure que l'acotació (51) implica l'existència d'una successió $\varepsilon_n \to 0$ que dóna un límit al segon membre de (47) per a qualssevol $\boldsymbol{\psi} \in \widetilde{\mathcal{D}}_\sigma(\Omega)$ i $t \in [0,\infty)$. Evidentment, això implica la convergència anàloga del primer membre de (47). D'això, i de la relació (48), se'n dedueix l'existència d'una funció $t \mapsto \boldsymbol{u}(t)$ definida per a $0 \le t < \infty$ tal que $\boldsymbol{u}^{\varepsilon_n}(t)$ convergeix feblement cap a $\boldsymbol{u}(t)$ en cada instant $t \in [0,\infty)$.

D'altra banda, el caràcter decreixent de la funció $t \mapsto \|\boldsymbol{u}^\varepsilon(t)\|_2$, que es dedueix de (46), permet aconseguir la convergència de la norma quadràtica $\|\boldsymbol{u}^{\varepsilon_n}(t)\|_2$ cap a un límit $U(t)$ que també és funció decreixent de t. Això s'aconsegueix mitjançant l'extracció d'una subsuccessió, la qual seguirem denotant ε_n, i que es basa en un altre principi de selecció d'Eduard Helly (1921). Les quantitats $U(t)$ i $\|\boldsymbol{u}(t)\|_2$, que són respectivament el límit de la norma i la norma del límit feble de $\boldsymbol{u}^{\varepsilon_n}(t)$, es veuen obligades a complir la desigualtat $\|\boldsymbol{u}(t)\|_2 \le U(t)$, però la igualtat només es compleix quan la convergència de $\boldsymbol{u}^{\varepsilon_n}(t)$ cap a $\boldsymbol{u}(t)$ és forta.

Finalment, a partir de (52) el principi de selecció de Hilbert també permet aconseguir que els elements de la matriu $\nabla \boldsymbol{u}^{\varepsilon_n}$ convergeixin en sentit feble com a funcions espaciotemporals (més concretament, com a funcions sobre $\Omega \times [0,t]$ per a cada $t \in [0,\infty)$). Prenent límits sobre (49) es comprova fàcilment que les funcions límit compleixen la condició que defineix les derivades de $\boldsymbol{u}$ en sentit feble. Afinant una mica més, Leray demostra l'existència d'un conjunt $\mathcal{S} \subset (0,\infty)$ de longitud nul·la en el sentit de Lebesgue tal que si $t \notin \mathcal{S} \cup \{0\}$ llavors es pot extraure una subsuccessió ε'_n que fa que $\nabla \boldsymbol{u}^{\varepsilon'_n}(t)$ sigui feblement convergent (com a funció sobre Ω), de la qual cosa en dedueix que la convergència de $\boldsymbol{u}^{\varepsilon_n}(t)$ cap a $\boldsymbol{u}(t)$ és forta (per a la successió ε_n, que no depèn de t). Aquesta part està relacionada amb un altre principi de selecció que és degut a Franz Rellich (1930); tanmateix el resultat d'aquest últim autor es refereix al cas en què Ω és una regió acotada, de manera que Leray va haver d'afegir certs arguments que tenen cura del caràcter no acotat de la regió $\Omega = \mathbb{R}^3$. D'altra banda, és immediat comprovar que també hi ha convergència forta de $\boldsymbol{u}^{\varepsilon_n}(0)$ cap a $\boldsymbol{u}(0)$.

Recopilant el que hem vist en aquest apartat, existeix una successió $\varepsilon_n \to 0$ i un conjunt $\mathcal{S} \subset (0,\infty)$ de longitud nul·la tals que, en tot instant $t \in [0,\infty)$:

a) $\boldsymbol{u}^{\varepsilon_n}(t)$ convergeix feblement cap a un cert límit $\boldsymbol{u}(t)$;
aquesta convergència és forta quan $t \notin \mathcal{S}$;

b) $\|\boldsymbol{u}^{\varepsilon_n}(t)\|_2$ convergeix cap a un cert límit $U(t) \ge \|\boldsymbol{u}(t)\|_2$;
aquesta última desigualtat es converteix en una igualtat quan $t \notin \mathcal{S}$;

c) $\nabla \boldsymbol{u}^{\varepsilon_n}$ convergeix feblement, com a funció sobre $\Omega \times [0,t]$,
cap a un cert límit que es pot identificar amb $\nabla \boldsymbol{u}$.

8.6 Doncs bé, aquestes convergències resulten ser suficients per a poder prendre límits sobre les equacions (49), (48) i (47) que compleix $\boldsymbol{u}^{\varepsilon_n}$ i deduir que el límit $\boldsymbol{u}$ compleix les equacions (38), (35) i (37) amb $T = \infty$. En altres paraules, $\boldsymbol{u}$ constitueix efectivament una solució feble de (14) en l'interval $0 \le t < \infty$.

D'altra banda, també resulta interessant prendre límits sobre la igualtat de l'energia (46). En aquest cas, la convergència feble de $\nabla \boldsymbol{u}^{\varepsilon_n}$ no és suficient per a garantir que la integral espaciotemporal de $|\nabla \boldsymbol{u}^{\varepsilon_n}|^2$ convergeixi cap a la integral anàloga de $|\nabla \boldsymbol{u}|^2$. Tanmateix encara es pot deduir la *desigualtat de l'energia* següent:

$$\tfrac{1}{2}\,\|\boldsymbol{u}(t)\|_2^2 + \int_{t_0}^{t}\int_{\Omega} \nu\,|\nabla \boldsymbol{u}|^2\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}s \;\le\; \tfrac{1}{2}\,\|\boldsymbol{u}(t_0)\|_2^2, \quad \text{si } 0 \le t_0 \le t \text{ i } t_0 \notin \mathcal{S}. \qquad (53)$$

Noteu que aquesta desigualtat no ha estat deduïda de la definició de solució feble, sinó de la igualtat de l'energia que satisfan les solucions aproximades $\boldsymbol{u}^{\varepsilon}$. Tal com veurem en la propera secció, *la noció de solució feble per si sola no implica pas la desigualtat de l'energia,* i menys encara la corresponent igualtat. Davant d'això, i de la importància que té la desigualtat de l'energia, resulta convenient introduir un nou concepte de solució que demani explícitament el seu compliment. En aquest punt, ens apartarem de la terminologia utilitzada per Leray: en lloc de *solucions turbulentes*, nosaltres en direm *solucions globalment dissipatives*. Per definició, una *solució globalment dissipativa* de (14) a l'interval $[0, T)$ vol dir una solució feble en el sentit de § 7.6 que a més compleix la desigualtat (53), on $\mathcal{S}$ és algun subconjunt de $(0, T)$ que tingui longitud nul·la en el sentit de Lebesgue.

Amb aquesta definició, el resultat d'aquesta secció es pot enunciar així [20: § V.31]:

3 Teorema *Sigui* $\Omega = \mathbb{R}^3$. *Per a qualsevol estat inicial* $\boldsymbol{u}_0$ *de quadrat integrable que tingui divergència nul·la en sentit feble, el problema* (14) *té almenys una solució globalment dissipativa* $\boldsymbol{u}(t)$ *la qual està definida per a tot temps* $t \ge 0$.

9 Solucions semiregulars. Regularitat parcial de les solucions globalment dissipatives

El mètode de la secció precedent deixa oberta la possibilitat que hi hagi diverses solucions globalment dissipatives compatibles amb un mateix estat inicial. D'altra banda, també hem deixat plantejada la qüestió de si la noció de solució feble implica o no la desigualtat de l'energia (53), o potser fins i tot la corresponent igualtat. Seguint Leray, en aquest capítol veurem què es pot arribar a dir sobre aquestes qüestions i altres de relacionades.

9.1 El contrast entre la desigualtat de l'energia obtinguda al capítol precedent i la igualtat de l'energia obtinguda a § 6.2 porta de manera natural a revisar els raonaments de § 6.2 i la seva aplicabilitat a les solucions febles. A aquest respecte, de seguida es veu que aquells raonaments corresponen essencialment a aplicar la relació (36) amb $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{u}$. El problema és que aquesta operació no està justificada llevat que $\boldsymbol{u}$ sigui prou regular. En aquest sentit, la relació (36) demana explícitament que $\boldsymbol{\psi}$ pertanyi a $\widetilde{\mathcal{D}}_{\sigma}(\Omega)$. Aquesta condició es pot relaxar una mica, però no fins al punt de permetre prendre $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{u}$ quan $\boldsymbol{u}$ és només una solució feble. La principal dificultat radica a *assegurar que tingui* *sentit la integral* $\int_0^t \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}V \, \mathrm{d}s$ (el curiós del cas és que de fet esperem que aquesta integral s'anul·li tan bon punt tingui sentit!).

A aquest efecte, les condicions d'integrabilitat de $\boldsymbol{u}$ i $\nabla \boldsymbol{u}$ que hem inclòs en la definició de solució feble (condicions *a*) i *b*) de § 7.6) són suficients en dimensió 2 (gràcies a la desigualtat (30)), però no en dimensió 3, on cal alguna condició addicional. Per exemple, seria suficient saber que la norma $\|\boldsymbol{u}(s)\|_\infty$ està acotada independentment de $s \in [0, t]$. Afinant una mica més, de fet n'hi ha prou que estigui ben definida la integral següent:

$$\|\boldsymbol{u}\|^2_{\infty,2,t} := \int_0^t \|\boldsymbol{u}\|^2_\infty \, \mathrm{d}s. \tag{54}$$

Seguint Leray [20: § IV.23] (vegeu també [19: § III]), definirem una *solució semiregular* de (14) en l'interval $[0, T)$ com una solució feble en aquest interval que sigui solució clàssica en l'interval obert $(0, T)$ i tingui la propietat que la integral (54) convergeixi per a tot $t \in (0, T)$.

Amb aquesta definició, els arguments apuntats més amunt permeten afirmar que *les solucions semiregulars satisfan la igualtat de l'energia* (la qual cosa implica de passada que $\boldsymbol{u}(t)$ convergeix fortament cap a $\boldsymbol{u}_0$ quan $t \downarrow 0$).

9.2 Suposem que $\boldsymbol{u}$ és una solució feble de (14) a l'interval $[0, T)$ i que també és solució clàssica en l'interval obert $(0, T)$. Certament, això últim implica la convergència de $\int_{t_0}^t \|\boldsymbol{u}\|^2_\infty \, ds$ sempre que $0 < t_0 < t < T$. Així, doncs, en tot cas els problemes de convergència de la integral (54) es troben en el límit $s \downarrow 0$. Si l'estat inicial $\boldsymbol{u}_0$ és prou regular, llavors no hi ha cap problema: de fet, les solucions que hem obtingut a § 5 són clarament semiregulars, ja que tenen la propietat que $\|\boldsymbol{u}(s)\|_\infty$ està acotada independentment de $s \in [0, t]$ (§ 5.5). D'altra banda, la convergència de la integral (54) no exclou la possibilitat que $\|\boldsymbol{u}(s)\|_\infty \to \infty$ quan $s \downarrow 0$, com cal esperar en el cas d'estats inicials que continguin singularitats (en el sentit de § 7.1).

Doncs bé, suposem que, a part de tenir quadrat integrable (és a dir energia finita) i divergència nul·la, $\boldsymbol{u}_0$ només està restringit per la condició addicional següent:

$$|\nabla \boldsymbol{u}_0|^2 \text{ és integrable} \tag{55}$$

(on les derivades $\nabla \boldsymbol{u}_0$ s'entenen en sentit feble). En dimensió 3 aquesta condició no permet descartar que $\boldsymbol{u}_0$ contingui singularitats. Tot i així, Leray va demostrar que si $\boldsymbol{u}_0$ compleix la condició (55) llavors el problema (14) té una solució semiregular i només una. De fet, també va arribar a la mateixa conclusió per a certes hipòtesis alternatives a (55) —com ara que $|\boldsymbol{u}_0|^p$ sigui integrable per a alguna $p > 3$—, però més avall serà especialment rellevant el cas de la condició (55).

Per a obtenir solucions de (14) per a estats inicials $\boldsymbol{u}_0$ poc regulars, Leray considera les solucions clàssiques de (14) amb estat inicial $R_\varepsilon * \boldsymbol{u}_0$, on R_ε és el nucli regularitzador que ha estat introduït a § 8.1, i llavors passa al límit $\varepsilon \to 0$. El caràcter semiregular de la solució, és a dir, la convergència de la integral (54), deriva de la condició (55) gràcies a una acotació de la forma $\|\boldsymbol{u}(t)\|_\infty \le C\,(\nu t)^{-1/4}\,\|\nabla\boldsymbol{u}_0\|_2$, la qual s'obté a partir de les equacions integrals de la secció 5 mitjançant la utilització de certes desigualtats generals.

Tot plegat, permet obtenir el resultat següent d'existència (la unicitat la deixem per a l'apartat següent) [20: § III.21, IV.24]:

4 Teorema *Sigui* $\Omega = \mathbb{R}^3$. *Si l'estat inicial* $\boldsymbol{u}_0$ *compleix la condició* (55), *llavors el problema* (14) *té una solució semiregular* $\boldsymbol{u}(t)$ *que està definida en un interval de temps de la forma* $0 \le t < T(\boldsymbol{u}_0)$, *on* $T(\boldsymbol{u}_0)$ *pot ser infinit, i existeixen unes constants* C_3 *i* C_4 *tals que:*

a) *Si* $T(\boldsymbol{u}_0) < \infty$ *llavors* $\|\nabla\boldsymbol{u}(t)\|_2 > \dfrac{C_3\,\nu}{(\nu(T(\boldsymbol{u}_0)-t))^{1/4}}$ *quan* $t \to T(\boldsymbol{u}_0)$.

b) *Si* $\dfrac{1}{\nu^4}\,\|\nabla\boldsymbol{u}_0\|_2^2\,\|\boldsymbol{u}_0\|_2^2 < C_4$ *llavors* $T(\boldsymbol{u}_0) = \infty$.

9.3 A § 9.1 hem vist que les solucions semiregulars compleixen la igualtat de l'energia. A més d'això, aquestes solucions són especialment interessants en relació amb la qüestió de la unicitat. Això és a causa que aquesta qüestió es pot estudiar mitjançant un mètode molt afí als càlculs que porten a la igualtat de l'energia. En efecte, si $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ són dues solucions clàssiques de (14) corresponents respectivament als estats inicials $\boldsymbol{u}_0$ i $\boldsymbol{v}_0$, llavors la diferència $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ és solució del problema

$$\begin{gathered} \partial\boldsymbol{w}/\partial t - \nu\,\Delta\boldsymbol{w} + \nabla r = -(\boldsymbol{w}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{w}, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{w} = 0, \\ \boldsymbol{w}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{w}|_\infty = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{w}|_{t=0} = \boldsymbol{w}_0, \end{gathered} \tag{56}$$

on $\boldsymbol{w}_0 = \boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{v}_0$. Procedint de manera anàloga a § 6.2, és a dir, multiplicant escalarment per $\boldsymbol{w}$ i integrant, s'arriba a la igualtat següent:

$$\tfrac12\,\|\boldsymbol{w}(t)\|_2^2 + \int_0^t\!\int_\Omega \nu\,|\nabla\boldsymbol{w}|^2\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}s = \tfrac12\,\|\boldsymbol{w}_0\|_2^2 + \int_0^t\!\int_\Omega \boldsymbol{w}\cdot\nabla\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}s. \tag{57}$$

Noteu que el terme que contenia $\boldsymbol{v}$ ha desaparegut a causa que $\int_\Omega \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}V$ val 0 (per la mateixa raó que en l'equació (25)). A partir de la relació (57) es dedueix fàcilment que

$$\|\boldsymbol{w}(t)\|_2^2 \le \|\boldsymbol{w}_0\|_2^2\,\exp\left(\frac{1}{2\nu}\int_0^t \|\boldsymbol{u}\|_\infty^2\,\mathrm{d}s\right). \tag{58}$$

En particular, si $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ corresponen a un mateix estat inicial, és a dir, $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{v}_0$, llavors tenim $\boldsymbol{w}_0 = \boldsymbol{0}$, i per tant (58) implica que $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$, és a dir, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$.

Com es pot veure, (58) requereix la convergència de la integral (54) que ha motivat la definició de solució semiregular. Doncs bé, mitjançant una reformulació adient, l'argument precedent es pot fer extensiu a les solucions semiregulars; més encara, relacionat amb el fet que a l'equació (57) apareix $\boldsymbol{u}$

però no $\boldsymbol{v}$, de fet *només cal suposar semiregular la solució $\boldsymbol{u}$, mentre que $\boldsymbol{v}$ pot ser qualsevol solució globalment dissipativa* [20: § VI.32]. La demostració es basa en la identitat $\|\boldsymbol{w}\|_2^2 = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_2^2 = \|\boldsymbol{u}\|_2^2 + \|\boldsymbol{v}\|_2^2 - 2\,\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle$, i consisteix a tractar els tres termes de la dreta respectivament mitjançant: *a*) la igualtat de l'energia aplicada a la solució semiregular $\boldsymbol{u}$; *b*) la desigualtat de l'energia aplicada a la solució globalment dissipativa $\boldsymbol{v}$, i *c*) un cas particular de la relació que expressa que $\boldsymbol{v}$ és solució feble de (14), a saber, el cas en què prenem com a funció de prova la funció regular $\boldsymbol{u}$ (és a dir, la relació (36) amb $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{\psi}$ substituïdes respectivament per $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{u}$); en aquest punt s'utilitza també el fet que la funció $\boldsymbol{u}$ és solució clàssica per a $t > 0$. El resultat és una relació que només difereix de (57) en què el signe d'igualtat està substituït per un signe de *desigualtat*. De totes maneres, això és suficient per a deduir la desigualtat (58) i concloure que $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{v}_0$ implica $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$.

Així, doncs, podem enunciar el resultat següent, en el qual la part *a*) ha estat obtinguda a § 9.1:

5 TEOREMA *Sigui $\Omega = \mathbb{R}^3$. Una solució semiregular $\boldsymbol{u}$ definida en un interval de la forma $[0, T)$ té les propietats següents: a) satisfà la igualtat de l'energia; b) és única, i c) de fet, coincideix, en tot l'interval $[0, T)$, amb qualsevol solució globalment dissipativa que comenci amb el mateix estat inicial i estigui definida a $[0, T')$ amb $T' \geq T$.*

9.4 Notablement, els teoremes 4 i 5 permeten deduir resultats força interessants sobre la regularitat parcial de les solucions globalment dissipatives.

Per definició, una solució globalment dissipativa $\boldsymbol{u}$ és solució feble i per tant té la propietat que $|\nabla \boldsymbol{u}|^2$ és integrable sobre $\Omega \times [0, t]$ per a qualsevol $t > 0$. Ara bé, això implica que $|\nabla \boldsymbol{u}(t_0)|^2$ és integrable sobre Ω per a qualsevol $t_0 \in [0, \infty) \setminus \mathcal{S}$, on $\mathcal{S}$ representa un conjunt de longitud nul·la. Per tant, en virtut dels dos teoremes precedents, $\boldsymbol{u}(t_0)$ és l'estat inicial d'una única solució semiregular que està definida en un interval de la forma $[t_0, T)$ i en aquest interval la solució globalment dissipativa $\boldsymbol{u}$ ha de coincidir forçosament amb aquesta solució semiregular. A partir d'això, es pot deduir que $\boldsymbol{u}$ és solució clàssica en uns intervals oberts disjunts J_k $(k = 0, 1, 2, \dots)$ la unió dels quals té com a complementari un conjunt de longitud nul·la. D'altra banda, el fet que una solució globalment dissipativa $\boldsymbol{u}$ compleix la desigualtat de l'energia (53) es pot combinar amb l'acotació inferior *b*) del teorema 4 per a obtenir certes conseqüències sobre els intervals de regularitat i el comportament de la solució en el límit $t \to \infty$.

Concretament, el resultat que s'obté és el següent [20: § IV.33–34]:

6 TEOREMA *Sigui $\Omega = \mathbb{R}^3$. Sigui $\boldsymbol{u}$ una solució globalment dissipativa de* (14) *a l'interval $[0, \infty)$. Llavors $\boldsymbol{u}$ és solució clàssica en uns intervals oberts disjunts J_k $(k = 0, 1, 2, \dots)$ la unió dels quals té com a complementari un conjunt de longitud nul·la en el sentit de Lebesgue. Més concretament, els intervals J_k compleixen les propietats següents, on C_3 és la constant del teorema 4 i $|J|$ re-*

presenta la longitud d'un subconjunt de $\mathbb{R}$*:*

$$J_0 = (\vartheta_0, \infty) \ \ amb \ \ \vartheta_0 \ \geq \ (2C_3)^{-4}\, \|\boldsymbol{u}_0\|_2^4 \,/\, \nu^5, \tag{59}$$

$$\sum_{k>0} |J_k|^{1/2} \ < \ (2C_3)^{-2}\, \|\boldsymbol{u}_0\|_2^2 \,/\, \nu^{5/2}. \tag{60}$$

Finalment, quan $t \to \infty$ *l'estat de moviment* $\boldsymbol{u}(t)$ *tendeix al repòs de la manera següent: per a cada* $T > \vartheta_0$ *existeixen unes constants* M *i* M' *tals que*

$$\|\nabla \boldsymbol{u}(t)\|_2 \leq M\, \|\boldsymbol{u}_0\|_2\, (\nu t)^{-1/2}, \quad \|\boldsymbol{u}(t)\|_\infty \leq M'\, \|\boldsymbol{u}_0\|_2\, (\nu t)^{-3/4}, \quad \forall t > T. \tag{61}$$

Noteu que segons (59) i (61) qualsevol solució globalment dissipativa acaba sent solució clàssica i tendint a zero, almenys en els sentits de (61). A aquest respecte, Leray va deixar plantejada la qüestió de si també tendia a zero la norma quadràtica, és a dir, l'energia. Aquesta pregunta va ser contestada afirmativament el 1984, primer en el cas bidimensional (on la pregunta tampoc no és trivial) per Tosio Kato [43], i poc després en el cas tridimensional per Kyûya Masuda [44].

D'altra banda, el teorema 6 deixa oberta la possibilitat que el conjunt d'instants singulars tingui una estructura similar al famós conjunt ternari de Georg Cantor (1883). A aquest respecte, l'acotació (60) es pot interpretar com una restricció sobre la manera en què es poden acumular els instants singulars: tal com va assenyalar Vladimir Scheffer el 1975 [39b], de fet (60) implica que el complementari de $\bigcup_k J_k$ té dimensió fraccionària inferior o igual a $1/2$ en el sentit de Haussdorff, la qual cosa és més forta que dir que té longitud nul·la.

Així, doncs, en general no es pot descartar la possibilitat que, partint d'un mateix estat inicial $\boldsymbol{u}_0$, les solucions globalment dissipatives es ramifiquin amb una certa profusió i formin un arbre més o menys poblat. De totes maneres, a la llarga, totes les branques d'aquest arbre acaben convergint cap a la solució nul·la.

10 Altres tècniques

10.1 El teorema 3 d'existència global de solucions globalment dissipatives va ser estès al cas $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ per Eberhard Hopf (1951) [23]. Aquest autor es va basar en una idea que anteriorment havia estat aplicada a altres equacions diferencials, especialment de cara a l'obtenció de solucions aproximades. En la versió que ens interessa, aquesta idea és deguda principalment a Boris G. Galërkin (1915) i Alessandro Faedo (1949). Aplicada al nostre problema, es tracta de prendre l'equació feble (37) i restringir tant la incògnita $\boldsymbol{u}$ com la funció de prova $\boldsymbol{\psi}$ a certs espais de dimensió finita però cada vegada més gran, de manera que en el límit es recupera el problema que ens interessa.

Aquesta estratègia funciona gràcies a certs resultats més o menys clàssics (l'exemple més clàssic el proporcionen les sèries de Fourier) que vénen a dir que els espais de funcions que ens incumbeixen tenen una base numerable formada per funcions regulars. En particular, dins de $\mathcal{D}_\sigma(\Omega)$ es pot seleccionar una col·lecció infinita però numerable de camps vectorials $\boldsymbol{\psi}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, de manera que les seves combinacions lineals finites permeten acostar-se indefinidament, en una varietat de normes, a qualsevol altre element $\mathcal{D}_\sigma(\Omega)$ i en general també a qualsevol altre element de la corresponent compleció de $\mathcal{D}_\sigma(\Omega)$. En el cas de la norma quadràtica, aquesta compleció està formada per tots els camps vectorials de quadrat integrable en el sentit de Lebesgue que satisfan les condicions següents: la seva divergència és nul·la en sentit feble; el seu component normal a la frontera és nul en un cert sentit generalitzat. Mitjançant un procediment que no ofereix especial dificultat, es pot aconseguir que, a més, els camps vectorials $\boldsymbol{\psi}_k$ siguin ortogonals entre si i tinguin norma quadràtica igual a la unitat, és a dir, que els productes escalars $\langle \boldsymbol{\psi}_k, \boldsymbol{\psi}_l \rangle = \int_\Omega \boldsymbol{\psi}_k \cdot \boldsymbol{\psi}_l \, \mathrm{d}V$ valguin zero quan $k \neq l$ i la unitat quan $k = l$. De manera totalment anàloga a les sèries de Fourier, de tot això en resulta que qualsevol camp vectorial $\boldsymbol{v}$ de la compleció abans esmentada es pot representar mitjançant una sèrie convergent (en la norma quadràtica) de la forma $\boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^\infty \xi_k \, \boldsymbol{\psi}_k$, on els coeficients ξ_k vénen donats per $\xi_k = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi}_k \rangle = \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\psi}_k \, \mathrm{d}V$. En termes d'aquests coeficients, que podem interpretar com les coordenades de $\boldsymbol{v}$ en la base formada pels camps vectorials $\boldsymbol{\psi}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, la norma quadràtica de $\boldsymbol{v}$ ve donada per la sèrie numèrica convergent $\|\boldsymbol{v}\|_2^2 = \sum_{k=1}^\infty \xi_k^2$. En el que segueix, E_n denota l'espai format per les combinacions lineals de $\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \ldots, \boldsymbol{\psi}_n$, i P_n denota l'operador de projecció ortogonal sobre E_n $(P_n \boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^n \xi_k \, \boldsymbol{\psi}_k)$.

Doncs bé, una manera natural d'acostar-se a les equacions de Navier-Stokes des de dimensió finita consisteix a introduir un paràmetre enter n, que després farem augmentar indefinidament, i considerar per a cada valor de n un problema completament anàleg a (37) on tant $\boldsymbol{u}$ com $\boldsymbol{\psi}$ estan restringits a prendre valors en l'espai E_n:

$$\boldsymbol{u}(t) \in E_n, \qquad \forall t \in [0, T); \tag{62.1$_n$}$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{\psi}(t) \, \mathrm{d}V \; &= \; \int_\Omega \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{\psi}(0) \, \mathrm{d}V \\ &\quad + \int_0^t \int_\Omega \Big(\boldsymbol{u} \cdot (\partial \boldsymbol{\psi} / \partial t) - \nu \, \boldsymbol{u} \cdot \Delta \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{u} \Big) \, \mathrm{d}V \, \mathrm{d}s, \\ &\qquad \forall \boldsymbol{\psi} \in \widetilde{E}_n, \quad \forall t \in [0, T), \end{aligned} \tag{62.2$_n$}$$

on $\widetilde{E}_n$ representa el subconjunt de $\widetilde{\mathcal{D}}_\sigma(\Omega)$ descrit per la condició $\boldsymbol{\psi}(t) \in E_n$, $\forall t \in [0, T)$. Com en el cas infinitodimensional (vegeu § 7.6), de fet ens podem limitar a considerar funcions $\boldsymbol{\psi}$ independents de t. I encara més, atès que la relació $(62.2)_n$ és lineal en $\boldsymbol{\psi}$, de fet només cal considerar els n casos $\boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{\psi}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. D'altra banda, si introduïm les representacions

$$\boldsymbol{u}(t) = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k(t) \, \boldsymbol{\psi}_k, \qquad \boldsymbol{u}_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_{k0} \, \boldsymbol{\psi}_k, \tag{63}$$

es veu fàcilment que el problema que estem considerant es redueix a un sistema d'equacions diferencials ordinàries de la forma

$$d\zeta_k/dt = -\nu \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\,\zeta_l + \sum_{l,m=1}^{n} b_{klm}\,\zeta_l\,\zeta_m, \quad \zeta_k(0) = \zeta_{k0}, \quad (k=1,2,\dots,n) \qquad (64)$$

per a les funcions numèriques $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$. Concretament, a_{kl} i b_{klm} són unes constants que vénen donades respectivament per $a_{kl} = \int_\Omega \nabla\boldsymbol{\psi}_k : \nabla\boldsymbol{\psi}_l \, dV$ i $b_{klm} = \int_\Omega \boldsymbol{\psi}_l \cdot \nabla\boldsymbol{\psi}_k \cdot \boldsymbol{\psi}_m \, dV$. En el que segueix, la solució de (64) la denotarem $\zeta_k^{(n)}$ i la solució corresponent de $(62)_n$ la denotarem $\boldsymbol{u}^{(n)}$ (noteu que $\boldsymbol{u}^{(n)}(0) = P_n\boldsymbol{u}_0$).

Com es pot veure, el sistema (64) hereta de les equacions de Navier-Stokes uns certs termes quadràtics que en principi podrien limitar les seves solucions a un temps d'existència finit. D'altra banda, resulta que les solucions del problema finitodimensional que estem considerant també compleixen la igualtat de l'energia:

$$\tfrac{1}{2}\,\|\boldsymbol{u}^{(n)}(t)\|_2^2 + \int_{t_0}^{t}\int_\Omega \nu\,|\nabla\boldsymbol{u}^{(n)}|^2\,dV\,ds = \tfrac{1}{2}\,\|\boldsymbol{u}^{(n)}(t_0)\|_2^2, \quad \text{per a } 0 \le t_0 \le t. \qquad (65)$$

Aquesta igualtat s'obté fàcilment a partir de la relació $(62.2)_n$ tot prenent $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{u}^{(n)}$. En aquest cas, això està justificat, ja que per diferenciació successiva de (64.1) es veu que les seves solucions són infinitament derivables, i introduint aquesta informació a (63.1) es dedueix que $\boldsymbol{u}^{(n)}$ compleix les condicions que es demanen a $\boldsymbol{\psi}$. Com en el mètode de Leray (vegeu § 8.2), la igualtat precedent permet deduir que $\boldsymbol{u}^{(n)}$ està definida per tot $t \ge 0$. La diferència essencial respecte a § 6.3, on teníem aparentment els mateixos ingredients, és que aquí ens movem en un espai de dimensió finita, on totes les normes són equivalents, mentre que allà havíem de distingir entre la norma quadràtica, sobre la qual ens dóna informació la igualtat de l'energia, i la norma del suprem, que és la que havíem d'acotar per a poder garantir la globalitat de la solució.

Així, doncs, ens trobem en una situació totalment anàloga a la de § 8: el problema (14) apareix com a límit d'una seqüència $(62)_n$ amb $n \to \infty$, on cadascun dels problemes $(62)_n$ té existència, unicitat i globalitat de solució i a més aquesta compleix la igualtat de l'energia. A partir d'aquí, es pot seguir essencialment el mateix procés que a § 8, la qual cosa resulta en una extensió del teorema 3 al cas d'una regió $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, almenys quan aquesta regió és acotada.

10.2 El cas $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ va ser considerat també en 1955–1957 per Andreĭ A. Kiselëv i Olga A. Ladyzhenskaya [25], els quals van donar essencialment un resultat d'existència i unicitat de solucions semiregulars similar als teoremes 4 i 5 de la secció 9.

Pel que fa al resultat pròpiament dit, a més de la hipòtesi sobre Ω, la principal diferència respecte als resultats de la secció 9 és que les solucions de Kiselëv i Ladyzhenskaya no suposen acotada la quantitat (54), sinó alguna altra, com ara $\|\boldsymbol{u}\|_{4,\infty,t} := \sup_{0\le s\le t} (\int_\Omega |\boldsymbol{u}(s)|^4\,\mathrm{d}V)^{1/4}$ (o dues altres alternatives). De totes maneres, la idea fonamental és exactament la mateixa: d'una banda, la condició que aquesta quantitat estigui acotada té la virtut d'implicar la unicitat de tals solucions, i d'altra banda es pot veure que si l'estat inicial és prou regular llavors existeix efectivament una solució que compleix aquesta condició, encara que possiblement només s'estengui a un interval de temps finit.

Pel que fa al mètode utilitzat per aquests autors, la unicitat la demostren essencialment de la mateixa manera que a § 9.3. Tanmateix, en la part d'existència utilitzen mètodes diferents als de § 9.2. D'una banda, no construeixen les solucions semiregulars com a límit de les solucions clàssiques de § 5, sinó que utilitzen el mètode de Galërkin, com a la secció precedent. D'altra banda, i més fonamentalment, les acotacions sobre les solucions tampoc les obtenen a partir de les equacions integrals de § 5, sinó que les dedueixen mitjançant procediments similars al que porta a la igualtat de l'energia. Concretament, a més de l'acotació que es dedueix d'aquesta última igualtat, Kiselëv i Ladyzhenskaya n'utilitzen una altra que resulta de derivar l'equació (14.1) respecte al temps, multiplicar-la escalarment per $\partial\boldsymbol{u}/\partial t$ i integrar sobre $\Omega\times[0,t]$. En les manipulacions subseqüents, és crucial poder acotar la integral $\int_\Omega |\boldsymbol{u}|^4\,\mathrm{d}V$ en termes de $\int_\Omega |\boldsymbol{u}|^2\,\mathrm{d}V$ i $\int_\Omega |\nabla\boldsymbol{u}|^2\,\mathrm{d}V$ (i similarment amb $\partial\boldsymbol{u}/\partial t$ en lloc de $\boldsymbol{u}$). A aquest respecte, en el cas tridimensional val una desigualtat similar a (30), però amb uns altres exponents, a saber:

$$\int_\Omega |f|^4\,\mathrm{d}V \;\le\; \frac{1}{3\sqrt{3}}\,\left(\int_\Omega |f|^2\,\mathrm{d}V\right)^{1/4}\,\left(\int_\Omega |\nabla f|^2\,\mathrm{d}V\right)^{3/4}, \tag{66}$$

on f està restringida a anul·lar-se en la frontera d'una regió acotada però altrament arbitrària de $\mathbb{R}^3$ (per a ser exactes, l'article original [25c] no utilitza la desigualtat (66) sinó una variant lleugerament més feble). Tot plegat implica que la funció numèrica $t\mapsto\|\partial\boldsymbol{u}(t)/\partial t\|_2$ satisfà una certa desigualtat diferencial de la qual es dedueix que les acotacions en qüestió es mantenen durant un cert interval de temps, possiblement finit.

Subseqüentment a [25], el 1958 va aparèixer el treball [26] que ja hem esmentat a § 6.3, on Ladyzhenskaya va traslladar aquest mètode al cas bidimensional i va observar que el fet de disposar de la desigualtat (30) en lloc de (66) permet estendre les solucions a temps arbitràriament grans. Poc després, en 1958–1962, aquests treballs de Kiselëv i Ladyzhenskaya van ser perfeccionats per diversos autors, especialment Jacques L. Lions, Giovanni Prodi, Ciprian Foiaş i James Serrin.

Una característica remarcable d'aquest mètode és la seva independència respecte a les equacions integrals de la secció 5. En particular, s'estalvia qualsevol càlcul més o menys explícit del nucli $\Gamma(t)$ (que ja hem dit a § 5.7 que esdevé especialment dificultós en el cas $\Omega\subset\mathbb{R}^n$). En aquest sentit, i també en un sentit més intrínsec, el mètode precedent és comparable als anomenats mètodes «funcionals», «directes» o «de l'energia» que diversos autors havien desenvolupat anteriorment en el cas d'equacions en derivades parcials de tipus el·líptic.

Dit això, també és cert que si es vol demostrar la regularitat de les solucions obtingudes, per exemple per a poder dir que per a $t > 0$ són solucions del problema en sentit clàssic, llavors és bastant inevitable un estudi acurat del nucli $\Gamma(t)$ en la línia que hem esmentat a § 5.7 i que reprenem en l'apartat següent.

10.3 Segons hem comentat a § 5.7, en el cas $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ resulta difícil obtenir informació detallada sobre el nucli $\Gamma(t)$, la qual cosa limita d'alguna manera les possibilitats del mètode d'aproximacions successives de la secció 5. Tanmateix aquesta afirmació ha de ser revisada en una direcció més optimista: per a ser exactes, el que resulta força difícil, si no impossible, en el cas $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, és l'obtenció d'una expressió explícita per a la funció $\Gamma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)$. Certament, sense tal expressió el mètode d'aproximacions successives no es pot considerar pas un mètode de càlcul efectiu (de solucions aproximades). Ara bé, de cara a l'obtenció de resultats d'existència i unicitat (de solucions exactes) no cal conèixer cap expressió explícita del nucli $\Gamma(t)$, sinó que n'hi ha prou de poder acotar la magnitud de $\Gamma(t) * \boldsymbol{v}$, mesurada en una certa norma, en termes del valor de t i de la magnitud de $\boldsymbol{v}$, mesurada en una norma possiblement diferent de l'anterior. Doncs bé, hi ha certes construccions que faciliten notablement aquesta tasca i que proporcionen un marc d'anàlisi funcional on el mètode d'aproximacions successives resulta força manejable, inclús en el cas $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Aquestes construccions tenen un caràcter força general i s'analitzen en l'anomenada *teoria de semigrups*.

10.3.1 La teoria de semigrups es pot entendre com l'estudi general del problema d'evolució associat a una equació diferencial lineal en un espai de Banach. Més concretament, s'estudia un problema de la forma

$$\mathrm{d}z/\mathrm{d}t + Az = 0, \qquad z(0) = z_0, \tag{67}$$

on la incògnita z és una funció de $t \geq 0$ amb valors en un espai de Banach $\mathbb{E}$ i A és un operador lineal que possiblement només està definit en un cert subconjunt $\mathbb{X}$ de l'espai $\mathbb{E}$. La teoria resultant permet estudiar també el cas no homogeni

$$\mathrm{d}z/\mathrm{d}t + Az = f, \qquad z(0) = z_0, \tag{68}$$

on f representa una funció coneguda de t, i tot plegat proporciona la base per a l'aplicació del mètode d'aproximacions successives a problemes no lineals de la forma

$$\mathrm{d}z/\mathrm{d}t + Az = B(z), \qquad z(0) = z_0. \tag{69}$$

En el que segueix utilitzarem les notacions següents: $\|\cdot\|$ representa la norma pròpia de l'espai $\mathbb{E}$; $\|\cdot\|_{(1)}$ representa una altra norma, definida per la fórmula $\|x\|_{(1)} = \|Ax\| + \|x\|$, que aplicarem als elements de $\mathbb{X}$. En relació amb l'operador A i el seu domini de definició, demanarem com a hipòtesis de partida que $\mathbb{X}$ sigui dens a $\mathbb{E}$ i que l'operador A sigui tancat; això últim equival a dir que $\mathbb{X}$ és un espai complet en la norma $\|\cdot\|_{(1)}$.

A § 3.1 ja ens hem mirat les equacions de Navier-Stokes com una equació diferencial de la forma $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t = F(z)$ on z representava el camp de velocitats $\boldsymbol{u}$. A aquest efecte es recordarà que hi jugava un paper fonamental la descomposició de Stokes-Helmholtz, la qual permet associar a cada camp vectorial $\boldsymbol{v}$ sobre Ω la seva part solenoïdal i paral·lela a la frontera, diguem-ne $P\boldsymbol{v}$. Amb aquesta notació, podem ser més explícits i escriure les equacions de Navier-Stokes en la forma (69) amb

$$z = \boldsymbol{u}, \qquad Az = -\nu\, P\,\Delta\boldsymbol{u}, \qquad B(z) = -P\,(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}. \tag{70}$$

De manera natural, les condicions accessòries (14.2)–(14.4) entren en joc a l'hora d'especificar l'espai $\mathbb{E}$ i el subconjunt $\mathbb{X}$ on es considera definit l'operador A. En l'esperit de § 4.2, es pot partir del conjunt $\mathcal{D}_\sigma(\Omega)$, que inclou totes aquelles condicions, i passar d'aquí a $\mathbb{E}$ i a $\mathbb{X}$ mitjançant certes construccions de compleció. Pel que fa a l'espai $\mathbb{E}$, es tracta simplement de considerar la compleció d'aquell conjunt en alguna norma concreta $\|\cdot\|$. Pel que hem vist en els capítols precedents, és molt natural optar per la norma quadràtica, però també és possible treballar en altres normes. Pel que fa a l'operador A i el seu domini de definició $\mathbb{X}$, s'utilitza un cert procediment de clausura que equival a completar $\mathcal{D}_\sigma(\Omega)$ en la norma $\|\cdot\|_{(1)}$. En particular, això ens situa en les hipòtesis de partida adoptades abteriorment per a A i $\mathbb{X}$. En el que segueix ens referirem a l'operador A com a *operador d'Stokes*.

En les equacions (67)–(69), la derivada dz/dt s'entén com un límit funcional en la norma $\|\cdot\|$ de $\mathbb{E}$. Això no és el mateix que la derivada parcial $\partial\boldsymbol{u}/\partial t$, que vol dir un límit numèric en cada punt $\boldsymbol{x}\in\Omega$. Així, doncs, en principi el concepte de solució de (67)–(69) també és una extensió del concepte clàssic de solució de les corresponents equacions en derivades parcials.

Tornant al problema general de la teoria de semigrups, quan $\mathbb{X}$ coincideix amb $\mathbb{E}$ llavors A és un operador lineal acotat (és a dir, continu) de $\mathbb{E}$ en $\mathbb{E}$. En aquest cas (que és l'únic que es pot donar en dimensió finita) la solució del problema (67) es pot expressar en la forma

$$z(t) = \mathrm{e}^{-At}\,z_0, \tag{71}$$

on e^{-At} representa un operador lineal acotat de $\mathbb{E}$ en $\mathbb{E}$ que depèn de t i que es pot construir a partir de A mitjançant la sèrie de potències de la funció exponencial. Doncs bé, en gran part la teoria de semigrups consisteix a trobar la manera de construir tals operadors e^{-At} en altres situacions on A no és un operador lineal acotat de $\mathbb{E}$ en $\mathbb{E}$ (sinó només de $\mathbb{X}$ en $\mathbb{E}$). Aquests operadors han d'estar definits almenys per a $t\ge 0$ i la fórmula (71) ha de proporcionar la solució de (67) almenys per a $z_0\in\mathbb{X}$; a més d'això també es demana que per a cada $t\ge 0$ l'operador e^{-At} s'estengui a un operador lineal acotat de $\mathbb{E}$ en $\mathbb{E}$, i que per a cada $z_0\in\mathbb{E}$ la fórmula (71) defineixi una funció contínua de $t \in [0,\infty)$ en $\mathbb{E}$. Per a cada $t \geq 0$, l'operador e^{-At} passa de l'estat inicial a l'estat al cap del temps t, de manera que es compleix la relació $\mathrm{e}^{-A(t+s)} = \mathrm{e}^{-At}\,\mathrm{e}^{-As}$ $(t,s \geq 0)$. En virtut d'aquesta propietat, es diu que la col·lecció d'operadors e^{-At} $(t \geq 0)$ constitueix un *semigrup*. Noteu que quan A és l'operador d'Stokes els operadors e^{-At} no són altra cosa que els operadors integrals de nucli $\Gamma(t)$ introduïts a la secció 5, és a dir, $\mathrm{e}^{-At}\,z_0 = \Gamma(t) * \boldsymbol{u}_0$. Com veurem a continuació, els mètodes de la teoria de semigrups permeten construir i analitzar aquests operadors no solament en el cas $\Omega = \mathbb{R}^n$, sinó també quan $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Noteu també que un cop es disposa de la solució de (67) en la forma (71), llavors és d'esperar que la solució del problema no homogeni (68) vingui donada per la fórmula

$$z(t) = \mathrm{e}^{-At}\,z_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-A(t-s)}\,f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{72}$$

10.3.2 Una situació en què és relativament senzill construir els operadors e^{-At} $(t \geq 0)$ és aquella en què $\mathbb{E}$ és un espai d'Hilbert i l'operador A és autoadjunt i positiu. En les hipòtesis de partida adoptades més amunt, aquestes dues últimes condicions equivalen a dir que $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ i que $\langle Ax, x\rangle \geq 0$, on x, y són elements arbitraris de $\mathbb{X}$ i $\langle\cdot,\cdot\rangle$ representa el producte escalar de $\mathbb{E}$. Per a l'operador d'Stokes en el context de la norma quadràtica, aquestes propietats es dedueixen fàcilment del caràcter ortogonal de la descomposició d'Stokes-Helmholtz i de la validesa de la relació $\int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\Delta\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V = -\int_\Omega \nabla\boldsymbol{u}:\nabla\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V$ per a $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathcal{D}_\sigma(\Omega)$. Doncs bé, en aquesta situació els operadors e^{-At} $(t \geq 0)$ es poden definir a través de l'anomenada representació espectral de l'operador A. Això resulta especialment senzill quan es disposa d'una base de $\mathbb{E}$ formada per funcions pròpies de A (en el sentit d'una base numerable a l'estil de Fourier, com la que hem considerat ja a § 10.1). Segons van demostrar David Hilbert i Erhard Schmidt (1904–1907), tal base existeix sempre que A té una certa propietat (resolvent compacte) que en el cas de l'operador d'Stokes es compleix tan bon punt la regió Ω és acotada, hipòtesi que adoptarem a partir d'ara. En la situació que estem considerant, les funcions pròpies i els corresponents valors propis, $\boldsymbol{\psi}_k$ i λ_k $(k = 1, 2, \ldots)$, tenen llavors les propietats següents: *a*) per definició

$$A\,\boldsymbol{\psi}_k = \lambda_k\,\boldsymbol{\psi}_k; \tag{73}$$

b) els valors propis són nombres reals positius i formen una successió no decreixent que tendeix a ∞; *c*) convenientment ajustades, les funcions pròpies tenen norma unitat i són ortogonals entre si; i *d*) les fórmules següents estableixen una correspondència biunívoca entre els elements x de $\mathbb{E}$ i les successions numèriques ξ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ de suma quadràtica $\sum_{k=1}^\infty \xi_k^2$ convergent:

$$x = \sum_{k=1}^\infty \xi_k\,\boldsymbol{\psi}_k, \qquad \xi_k = \langle x, \boldsymbol{\psi}_k\rangle, \qquad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^\infty \xi_k^2. \tag{74}$$

Operant terme a terme sobre (74.1), la igualtat (73) comporta que Ax hauria de venir donada per la sèrie

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \, \xi_k \, \boldsymbol{\psi}_k. \tag{75}$$

Aquesta relació correspon a dir que en la base que estem considerant els coeficients de x i els de Ax estan relacionats per una matriu diagonal (infinita). Tanmateix no es pot esperar que la sèrie precedent sigui convergent per a qualsevol x de $\mathbb{E}$ (a causa que $\lambda_k \to \infty$ quan $k \to \infty$). Tot i així, el caràcter tancat de l'operador A permet afirmar que la convergència d'aquesta sèrie és exactament equivalent a la pertinença de x a $\mathbb{X}$, i que tan bon punt es compleixen aquestes condicions llavors val la igualtat (75) (dit d'una altra manera, sempre que té sentit un dels dos membres de (75), llavors té sentit l'altre i val la igualtat).

D'altra banda, la igualtat (73) també comporta que la funció $z(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_k t} \, \boldsymbol{\psi}_k$ és solució de (67) amb $z_0 = \boldsymbol{\psi}_k$, la qual cosa porta a definir els operadors e^{-At} $(t \geq 0)$ de la manera següent:

$$\mathrm{e}^{-At} x = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_k t} \, \xi_k \, \boldsymbol{\psi}_k. \tag{76}$$

A diferència de (75), en aquest cas la propietat $\lambda_k > 0$ garanteix que la sèrie precedent és convergent per a qualsevol $x \in \mathbb{E}$ (amb l'acotació $\|\mathrm{e}^{-At} x\| \leq \|x\|$). No costa gaire de comprovar que els operadors e^{-At} $(t \geq 0)$ així definits compleixen les propietats desitjades. En particular, per a $x \in \mathbb{X}$ es justifiquen fàcilment les dues relacions següents:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathrm{e}^{-At} x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \, \mathrm{e}^{-\lambda_k t} \, \xi_k \, \boldsymbol{\psi}_k, \qquad A \, \mathrm{e}^{-At} x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \, \mathrm{e}^{-\lambda_k t} \, \xi_k \, \boldsymbol{\psi}_k, \tag{77}$$

d'on es dedueix que en aquest cas ($x \in \mathbb{X}$) la funció $z(t) = \mathrm{e}^{-At} x$ constitueix efectivament una solució de (67.1).

La idea d'utilitzar el mètode espectral precedent per a resoldre el problema lineal (67) associat a l'operador d'Stokes va ser proposada ja el 1931 per Folke Odqvist [17]. A partir del 1950, diversos autors van desenvolupar aquesta idea en un marc funcional com el de més amunt (vegeu per exemple [35a, 24a, 37]). És interessant notar que en el mateix treball de 1931 Odqvist suggeria també un altre mètode, basat en la transformació de Laplace, el qual ha estat utilitzat posteriorment de manera sistemàtica en la teoria de semigrups. Aquí ens limitarem a comentar que el mètode de la transformació de Laplace té un abast més general que el precedent, i que en particular permet treballar en altres normes diferents de la norma quadràtica.

10.3.3 Els semigrups com el que acabem de construir tenen unes propietats especials que esdevenen crucials a l'hora de considerar equacions no lineals de la forma (69). Per exemple, tenint en compte que la funció numèrica $\lambda e^{-\lambda}$ està acotada independentment de $\lambda \geq 0$, es veu de seguida que, per a $t > 0$, la sèrie de (77) és convergent per a qualsevol $x \in \mathbb{E}$. Així, doncs, les relacions (77) es poden justificar no solament per a $x \in \mathbb{X}$ i $t \geq 0$, sinó també per a qualssevol $x \in \mathbb{E}$ i $t > 0$. Basant-nos en aquest fet, podem dir que la funció $z(t) = e^{-At} z_0$ proporciona la solució del problema d'evolució (67) no solament per a $z_0 \in \mathbb{X}$, sinó també per a qualsevol $z_0 \in \mathbb{E}$: en efecte, recolzant-nos en un argument de l'estil de § 6.2 i § 9.3, podem assegurar que $z(t)$ és l'única funció contínua a l'interval tancat $0 \leq t < \infty$ i derivable en l'interval obert $0 < t < \infty$ que satisfà la condició inicial (67.2) i després evoluciona segons l'equació diferencial (67.1).

En la terminologia de la teoria de semigrups, es diu que tenim un *semigrup diferenciable*. Per definició, això significa que, per a qualsevol $x \in \mathbb{E}$, la funció $t \mapsto e^{-At}x$ és diferenciable en l'interval obert $0 < t < \infty$. Tal com es demostra en la teoria de semigrups, això implica automàticament que, per a $t > 0$, els valors de $e^{-At}x$ pertanyen a $\mathbb{X}$, el domini de l'operador A. No solament això; de fet, la propietat de semigrup permet deduir que, per a qualsevol $x \in \mathbb{E}$, la funció $t \mapsto e^{-At}x$ és infinitament diferenciable en l'interval obert $0 < t < \infty$, i en aquest interval els valors de $e^{-At}x$ pertanyen a $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{X}^n$, on $\mathbb{X}^n$ representa el domini de definició de l'operador A^n. En el cas que ens ocupa —i en general sempre que x representi una funció d'alguna variable $\boldsymbol{x}$ i A utilitzi derivades respecte a aquesta variable—, $\mathbb{X} = \mathbb{X}^1$ és un subconjunt estricte de $\mathbb{E} = \mathbb{X}^0$, i això comporta que $\mathbb{X}^n$ és un subconjunt estricte de $\mathbb{X}^{n-1}$ per a qualsevol n enter positiu. Més concretament, els conjunts $\mathbb{X}^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ estan formats per funcions que són cada vegada més derivables respecte a $\boldsymbol{x}$ (en algun sentit generalitzat). Així, doncs, el caràcter diferenciable del semigrup correspon a les propietats de regularització que ja trobàvem a la secció 5.

En la situació de § 10.3.2, aquest caràcter regularitzador està quantificat per l'acotació següent, la qual es dedueix de (77) en tenir en compte que $\lambda e^{-\lambda} \leq e^{-1}$ $(\forall \lambda \geq 0)$: per a qualsevol $x \in \mathbb{E}$ i qualsevol $t > 0$ es compleix

$$\|A\, e^{-At}\, x\| \leq C_1\, t^{-1}\, \|x\|, \tag{78}$$

on $C_1 = e^{-1}$. La validesa d'una acotació d'aquesta forma, possiblement amb un altre valor de la constant C_1, caracteritza els anomenats *semigrups analítics*. Tal com indica aquesta denominació, a partir de (78) es pot deduir que la funció $t \mapsto e^{-At}x$ no solament és infinitament diferenciable, sinó que a més és analítica (en l'interval obert $0 < t < \infty$, a partir del qual es pot estendre llavors a valors complexos de t).

Junt amb l'acotació precedent, els semigrups analítics satisfan la generalització següent en termes d'un paràmetre $\alpha > 0$:

$$\|A^{\alpha}\, e^{-At}\, x\| \leq C_{\alpha}\, t^{-\alpha}\, \|x\|. \tag{79}$$

Tal com veurem en un moment, de cara a l'estudi de l'equació no lineal (69) resulta especialment interessant el cas en què α és un nombre fraccionari entre 0 i 1. En la situació de § 10.3.2, les corresponents *potències fraccionàries* de A es poden definir de manera anàloga a (75) i (76):

$$A^\alpha x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha\, \xi_k\, \boldsymbol{\psi}_k, \tag{80}$$

i el seu domini de definició $\mathbb{X}^\alpha$ està caracteritzat simplement per la convergència de la sèrie precedent. Combinada amb (76), aquesta definició proporciona immediatament l'acotació (79) amb $C_\alpha = (\alpha/\mathrm{e})^\alpha$. De manera anàloga al cas $\alpha = 1$, el domini $\mathbb{X}^\alpha$ és un espai complet en la norma $\|\cdot\|_{(\alpha)}$ definida mitjançant la fórmula $\|x\|_{(\alpha)} = \|A^\alpha x\| + \|x\|$.

10.3.4 Les eines precedents permeten estudiar l'equació (69) mitjançant un mètode d'aproximacions successives a l'estil de la secció 5. De manera anàloga a com fèiem allà, es tracta d'utilitzar la fórmula (72) amb $f(t) = B(z(t))$, és a dir,

$$z(t) = \mathrm{e}^{-At}\, z_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-A(t-s)}\, B(z(s))\, \mathrm{d}s, \tag{81}$$

i seguir un procés d'aproximacions successives que correspon a posar $z = z_{m-1}$ en el segon membre d'aquesta equació integral i $z = z_m$ en el primer membre.

En posar en marxa aquest procediment, sorgeix el problema que l'operador no lineal B també té, com A, un domini de definició més petit que $\mathbb{E}$, diguem-ne $\mathbb{Y}$, de manera que per a poder donar sentit a (81) i al corresponent procés d'aproximacions successives cal assegurar que z pren valors a $\mathbb{Y}$. Ara bé, això no és tan difícil si es pot prendre $\mathbb{Y} = \mathbb{X}^\alpha$ per a alguna $\alpha < 1$: en efecte, l'acotació (79) junt amb la convergència de la integral $\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\mathrm{d}s$ assegura que la integral del segon membre de (81) dóna un element de $\mathbb{X}^\alpha$. Més concretament, per a poder arribar a un resultat anàleg al teorema 1 només cal suposar que B aplica $\mathbb{X}^\alpha$ en $\mathbb{E}$ i que compleix una acotació de la forma $\|B(x) - B(y)\| \leq L\|x - y\|_{(\alpha)}$ sempre que les normes $\|x\|_{(\alpha)}$ i $\|y\|_{(\alpha)}$ es mantenen acotades.

Per a poder verificar aquesta última condició, resulta essencial disposar de caracteritzacions menys abstractes dels espais $\mathbb{X}^\alpha$ i de les seves normes $\|\cdot\|_{(\alpha)}$ per a $0 \leq \alpha \leq 1$. Això és relativament fàcil per a $\alpha = 1/2$, però el cas $\alpha = 1$ esdevé força tècnic. Un cop resolt aquest cas, que és una tasca que van dur a terme el 1960–1961 Vsevolod A. Solonnikov [33] i Lamberto Cattabriga [34], llavors no costa gaire passar a la resta de valors de α.

L'aplicació d'aquestes idees a les equacions de Navier-Stokes es va fer pels volts de 1960 amb les contribucions de Selim G. Kreĭn [35], Pavel E. Sobolevskiĭ [36], i de Hiroshi Fujita junt amb Tosio Kato [38]. D'acord amb els resultats finals d'aquests treballs, les equacions de Navier-Stokes per a $n = 2$ o 3 es poden encabir en l'esquema precedent (en el context de la norma quadràtica) tot prenent $\alpha > n/4$.

En termes generals, les tècniques que hem vist en aquest capítol permeten estendre els resultats de les seccions precedents al cas d'una regió $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Tanmateix, el nucli del problema segueix sent essencialment el mateix.

11 Unicitat *versus* regularitat. Dissipació local. Regularitat parcial de solucions localment dissipatives

11.1 Recordem les preguntes fonamentals que tenim plantejades. Aquestes es refereixen al problema d'evolució per a les equacions de Navier-Stokes, és a dir, al problema de trobar la solució, o solucions, de (14) per a un estat inicial donat. Per a agilitzar el llenguatge, a partir d'ara se sobreentendrà que estem parlant de *solucions globals*, és a dir, definides per a tot temps $t \geq 0$. Amb aquest conveni, i potser estirant una mica la terminologia en un sentit que explicarem tot seguit, les preguntes 1 i 2, formulades respectivament a § 3.4 i a § 7.1, es poden replantejar de la manera següent (on la pregunta $2'$ va en sentit contrari a la pregunta 2):

Pregunta 1 (Existència i unicitat). *És cert que el problema té una sola solució?*

Pregunta $2'$ (Existència i regularitat). *És cert que el problema té (almenys) una solució regular?*

Precisem què volem dir en cada cas. Comencem per la pregunta $2'$ i el terme *solució regular*. Aquest terme ve a recollir tot un ventall de significats que en principi són diferents, però que en el cas que ens ocupa resulten ser equivalents.

Un possible significat seria el concepte de *solució sense singularitats*. Per ser precisos, l'absència de singularitats convé entendre-la com dient que $\boldsymbol{u}$ és una funció contínua i acotada en qualsevol conjunt de la forma $\Omega \times [0, t]$. En aquest context, la condició de ser solució es pot entendre en sentit feble o també en el sentit de l'equació integral (19) de la secció 5.

Un altre possible significat és el de *solució màximament regular*, és a dir infinitament derivable en el conjunt obert $\Omega \times (0, \infty)$ i «tot el que sigui possible» en el conjunt tancat $\bar{\Omega} \times [0, \infty)$. El que es pot pretendre en aquest últim conjunt depèn de la regularitat que tinguin les dades, $\boldsymbol{u}_0$ i Ω. En aquest context, la condició de ser solució de (14) es pot entendre en sentit clàssic, almenys quan les dades són prou regulars. Els estats inicials $\boldsymbol{u}_0$ poc regulars poden ser incompatibles amb demanar la continuïtat de $\boldsymbol{u}$ en el conjunt tancat $\bar{\Omega} \times [0, \infty)$, cas en el qual la condició inicial (14.5) s'ha d'entendre en algun sentit més feble (en particular, aquest és el cas de les solucions semiregulars de la secció 9, on $\boldsymbol{u}(t)$ s'acosta a $\boldsymbol{u}_0$ en la norma quadràtica quan $t \downarrow 0$).

En principi, les *solucions clàssiques* estan situades entre les *solucions sense singularitats* i les *màximament regulars*. En efecte, la interpretació clàssica de les equacions (14) només requereix una regularitat limitada.

Doncs bé, tal com hem vist a la secció 5 i a § 10.3.3, les equacions de Navier-Stokes tenen un caràcter regularitzador que fa que aquests diferents significats resultin equivalents. En altres paraules, si $\boldsymbol{u}$ és una solució de (14) sense singularitats, llavors és *màximament regular*. Més generalment, hi ha diversos resultats que vénen a dir que si $\boldsymbol{u}$ és *mínimament regular* en algun sentit concret i és solució de (14) llavors és *màximament regular* (el problema és que la regularitat mínima requerida no arriba a incloure les solucions febles, almenys en els resultats d'aquest estil obtinguts fins ara).

En particular, el terme *solució regular* es pot considerar, doncs, com a sinònim de *solució clàssica*. Per tant, la pregunta $2'$ és la mateixa que ens plantejàvem a les seccions 5–7, a saber, si les solucions clàssiques es poden estendre a tot temps $t \geq 0$. Però ara també ens la podem mirar des d'un altre punt de vista: partint de les solucions febles, que ja sabem que existeixen per a tot temps $t \geq 0$, es tracta de veure si entre elles en podem trobar alguna que no contingui singularitats.

Considerem ara la pregunta 1: És cert que el problema té una sola solució? A diferència de la pregunta $2'$, aquí no estem especificant cap tipus concret de solució. La idea és que volem estar oberts a possibles nocions generalitzades. D'altra banda, tampoc no es tracta d'acceptar qualsevol cosa com a solució. En aquest sentit, per a admetre un concepte de solució generalitzada resulta natural imposar la condició següent: quan $\boldsymbol{u}$ és prou regular, llavors $\boldsymbol{u}$ és solució generalitzada si i només si $\boldsymbol{u}$ és solució clàssica.

Tal com hem vist en les seccions anteriors, la noció de solució feble satisfà la propietat d'existència (global), però la unicitat no està assegurada. D'altra banda, la propietat d'existència (global) es compleix també dins de certes classes de solucions que són més restrictives. En efecte, més amunt hem vist que es compleix en la classe de solucions globalment dissipatives, la qual està continguda en la classe de solucions febles. Davant d'això, és lògic plantejar-se la qüestió de la unicitat a dins d'aquesta classe més restrictiva. Més avall insistirem en aquesta direcció. Però abans convé fer un aclariment respecte a la relació entre les preguntes 1 i $2'$.

11.2 Les preguntes 1 i $2'$ no són independents. En efecte, per la part d'unicitat del teorema 1 està clar que *una resposta afirmativa a la pregunta 2′ implica automàticament una resposta afirmativa a la pregunta 1 dins de la classe de solucions regulars*.

D'altra banda, aquesta proposició és certament invertible: si tenim una sola solució regular, òbviament en tenim almenys una. Tanmateix, *una resposta afirmativa a la pregunta 1 en una classe de solucions generalitzades* ***no*** *implica necessàriament una resposta afirmativa a la pregunta 2′*. En general, podria passar que cada estat inicial determinés una sola solució definida per a tot temps $t \geq 0$, però aquesta no fos regular. Tal com assenyala Michael Struwe a [64], de fet aquesta situació té lloc en certes equacions en derivades parcials que no són tan diferents de les equacions de Navier-Stokes (com ara l'equació

$\partial \boldsymbol{u}/\partial t = \Delta \boldsymbol{u} + |\nabla \boldsymbol{u}|^2\, \boldsymbol{u}$, quan $\boldsymbol{x}$ varia a l'interior d'un cercle i $\boldsymbol{u}$ pren valors en una esfera).

Així, doncs, les dues preguntes de més amunt no són equivalents. Des d'un punt de vista filosòfic, la més important de les dues és certament la pregunta 1, és a dir, la qüestió del determinisme. Tot i així, el «problema del mil·lenni» especificat pel Clay Mathematics Institute no consisteix en la pregunta 1 sinó en la pregunta 2′ [78].

11.3 Respecte a la pregunta 1, el 1969 Ladyzhenskaya va donar un exemple de manca d'unicitat de solucions febles que malgrat certes propietats indesitjables no deixa de ser interessant [29]. L'exemple en qüestió es basa en una idea de Golovkin (1964) i en certes construccions afins a les solucions autosimilars de Leray (§ 7.2). La principal diferència respecte a aquestes últimes és que aquí les singularitats no apareixen quan $t \uparrow T$, sinó quan $t \downarrow 0$. Dit d'una altra manera, no es tracta de la formació d'una singularitat, sinó de la seva evolució posterior. D'altra banda, la singularitat que està present a $t = 0$ resulta en un valor infinit de l'energia, la qual cosa li resta interès. De totes maneres, Ladyzhenskaya adapta la construcció a una regió espaciotemporal de la forma $\{\, (\boldsymbol{x}, t) \mid t > 0,\ \boldsymbol{x}/\sqrt{t} \in \Omega_1 \,\}$ —on la part espacial es contrau a un punt quan $t \downarrow 0$— i argumenta que en aquesta regió les funcions construïdes es poden considerar dues solucions febles diferents d'un mateix problema de contorn.

11.4 Tal com hem vist a § 8.6 i § 10.1, les solucions febles obtingudes per Leray i Hopf satisfan l'anomenada *desigualtat* de l'energia, en lloc de la corresponent *igualtat* que compleixen les solucions regulars. Però així com aquesta última igualtat es dedueix del mateix fet de constituir una solució regular, la desigualtat de l'energia no està assegurada de manera automàtica per a qualsevol solució feble. Davant d'això, Leray va optar per incloure explícitament aquella desigualtat en la seva definició de *solucions turbulentes*. Recordeu que nosaltres en diem *solucions globalment dissipatives*, la qual cosa fa èmfasi en el fet que satisfan aquella desigualtat.

La igualtat de l'energia que compleixen les solucions regulars afirma que en passar d'un instant t_0 a un altre posterior t l'energia cinètica decreix exactament en la quantitat $\int_{t_0}^{t}\int_{\Omega} \nu\, |\nabla \boldsymbol{u}|^2\, \mathrm{d}V \mathrm{d}s$. En canvi, la desigualtat de l'energia permet que l'energia decreixi en una quantitat superior a la precedent. Així, doncs, quan demanem que una solució feble compleixi la desigualtat de l'energia, el que estem dient és el següent: si les singularitats comporten una desviació respecte a la igualtat de l'energia, en tot cas aquesta desviació ha de ser en la direcció de constituir una *disminució addicional* de l'energia.

Aquesta restricció va en la línia del segon principi de la termodinàmica, que en el context que ens ocupa es pot interpretar en termes de la «dissipació» de l'energia cinètica «macroscòpica» en energia «microscòpica». Tanmateix, el segon principi no és només una qüestió del que passa al conjunt de Ω, sinó que també imposa restriccions en el que passa en qualsevol part del fluid. Això porta a considerar una *versió local de la desigualtat de l'energia*.

En un sentit simbòlic, aquesta condició de dissipació local correspondria a multiplicar l'equació diferencial (14.1) escalarment per $\boldsymbol{u}$ i després substituir el signe d'igualtat per un signe de desigualtat, *sense haver integrat* abans respecte a $\boldsymbol{x}$ ni t:

$$\partial\left(\tfrac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2\right)/\partial t \;-\; \nu\,\boldsymbol{u}\cdot\Delta\boldsymbol{u} \;+\; (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\left(p+\tfrac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2\right) \;\le\; 0. \tag{82}$$

Aquesta relació s'hauria de complir amb un signe d'igualtat a tot arreu on $\boldsymbol{u}$ és regular, mentre que en un punt singular s'hauria de complir d'alguna manera la desigualtat estricta.

Intentant parlar amb més propietat, podríem enfocar-ho des del punt de vista de les equacions integrals de balanç (secció 2), la qual cosa correspon a integrar la relació precedent sobre una regió espaciotemporal de la forma $\omega\times[t_0,t]$. Procedint d'aquesta manera, s'obté la relació següent:

$$\begin{aligned} &\int_\omega \tfrac{1}{2}|\boldsymbol{u}(t)|^2\,\mathrm{d}V \;+\; \int_{t_0}^{t}\int_\omega \nu\,|\nabla\boldsymbol{u}|^2\,\mathrm{d}V\mathrm{d}s \;\;\le \\ &\qquad \int_\omega \tfrac{1}{2}|\boldsymbol{u}(t_0)|^2\,\mathrm{d}V \;+\; \int_{t_0}^{t}\int_{\partial\omega}\left(\nu\,\boldsymbol{u}\cdot\nabla_{\!\perp}\boldsymbol{u}+\left(p+\tfrac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2\right)u_{\perp}\right)\mathrm{d}S\,\mathrm{d}s. \\ &\qquad\qquad \forall t_0\ge 0,\quad \forall t\ge t_0,\quad \forall\omega\in\mathcal{P}(\Omega). \end{aligned} \tag{83}$$

Si tenim en compte la condició d'absència de lliscament, de seguida es veu que per a $\omega=\Omega$ aquesta relació es converteix en la desigualtat global de l'energia que hem considerat fins ara. Tanmateix, en el cas general, el darrer terme de la desigualtat precedent conté la integral de $(p+\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2)u_{\perp}$, la qual no està clar que estigui ben definida per a les solucions febles.

Alternativament, podem enfocar la qüestió des del punt de vista de les equacions integrals amb què s'expressa la noció de solució feble (secció 7). Ja que la relació (82) que volem traduir a una versió feble no és una igualtat sinó una desigualtat, resulta natural restringir-se a *funcions de prova positives* sobre la regió espaciotemporal $\Omega\times(0,\infty)$. En el que segueix el conjunt de tals funcions de prova el denotarem $\mathcal{D}_+(\Omega\times(0,\infty))$. Com en la secció 7, es tractarà de multiplicar la relació (82) per un element arbitrari d'aquest conjunt, integrar sobre $\Omega\times[0,t]$ i aplicar la fórmula d'integració per parts per tal de transferir les derivades a la funció de prova. Procedint d'aquesta manera, s'arriba a la formulació següent:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \tfrac{1}{2}|\boldsymbol{u}(t)|^2\,\phi(t)\,\mathrm{d}V \;+\; \int_0^t\int_\Omega \nu\,|\nabla\boldsymbol{u}|^2\,\phi\,\mathrm{d}V\mathrm{d}s \;\;\le \\ &\qquad \int_0^t\int_\Omega\left(\tfrac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2\;(\partial\phi/\partial t+\nu\Delta\phi)+\left(p+\tfrac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2\right)\boldsymbol{u}\cdot\nabla\phi\right)\mathrm{d}V\mathrm{d}s. \\ &\qquad\qquad \forall t>0,\quad \forall\phi\in\mathcal{D}_+(\Omega\times(0,\infty)). \end{aligned} \tag{84}$$

Doncs bé, encara que no és gens obvi, resulta que la definició de solució feble implica certes acotacions sobre les integrals espaciotemporals de $|\boldsymbol{u}|^3$ i de $|p\,\boldsymbol{u}|$ que permeten donar sentit als diversos termes de (84). En consonància amb la nostra terminologia anterior, les solucions febles que satisfan aquesta condició les anomenarem *solucions localment dissipatives*.

També esmentarem aquí que existeix una reformulació força interessant de la condició precedent de Jean Duchon i Raoul Robert [50].

11.5 De fet, la condició (84) va ser introduïda el 1977 per Vladimir Scheffer [40], que va observar que el seu compliment implicava certes propietats de regularitat parcial per a $\boldsymbol{u}$. Aquestes propietats vénen a dir que $\boldsymbol{u}$ és regular llevat d'un conjunt de dimensió reduïda. A més d'això, Scheffer també va comprovar que la demostració de Leray sobre l'existència de solucions febles (secció 8) es pot ajustar de manera que les solucions febles obtingudes compleixin la condició de dissipació local (84). El 1982 aquests resultats van ser millorats per Luis Caffarelli, Robert Kohn i Louis Nirenberg [42] (els quals es refereixen a les solucions que acabem d'introduir com a *solucions febles adients*), i posteriorment encara han estat refinats per Fang-Hua Lin [48] i per Olga A. Ladyzhenskaya i Grigoriĭ A. Serëgin [49]. En conjunt, aquests treballs permeten enunciar els dos teoremes següents:

7 Teorema *Sigui* $\Omega = \mathbb{R}^3$. *Per a qualsevol estat inicial* $\boldsymbol{u}_0$ *de quadrat integrable que tingui divergència nul·la en sentit feble, el problema* (14) *té almenys una solució localment dissipativa* $\boldsymbol{u}(t)$ *que està definida per a temps arbitràriament grans.*

8 Teorema *Sigui* $\Omega = \mathbb{R}^3$. *Sigui* $\boldsymbol{u}$ *una solució localment dissipativa de* (14) *a l'interval* $[0,\infty)$. *Llavors* $\boldsymbol{u}$ *és regular en un subconjunt obert de* $\Omega\times(0,\infty)$ *el qual té com a complementari un conjunt de dimensió inferior o igual a* 1 *en el sentit de Haussdorff.*

11.6 En realitat, la demostració d'aquest últim teorema no utilitza el fet que $\boldsymbol{u}$ sigui solució (feble) de les equacions (14), sinó que es basa únicament en la desigualtat (84) i en el caràcter acotat de diverses integrals que hi estan associades. Doncs bé, vers el 1985 Scheffer va mostrar que es poden construir funcions $\boldsymbol{u}$ que compleixen totes aquestes premisses i en canvi tenen un conjunt singular de dimensió fraccionària arbitràriament propera a 1 [45]. Això significa que si mai s'arriba a obtenir algun resultat més fort que el teorema 8, en tot cas la seva demostració haurà d'utilitzar la resta d'informació que hi ha sobre $\boldsymbol{u}$.

De fet, la funció $\boldsymbol{u}$ construïda per Scheffer no és solució del problema (14), sinó d'un problema més general en el qual l'equació (14.1) conté una força exterior $\boldsymbol{f}$, com consideràvem en l'equació (9). D'altra banda, $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{f}$ es construeixen de tal manera que es compleix la desigualtat $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u} \leq 0$ (a tot arreu), és a dir, que

$\boldsymbol{f}$ actua en la direcció de frenar el moviment, o el que és el mateix, proporciona una dissipació addicional d'energia. A primera vista, això hauria de dificultar la formació de singularitats. Tanmateix cal notar que, en presència de la força exterior $\boldsymbol{f}$, la condició de dissipació local que requereix el segon principi de la termodinàmica ja no ve donada exactament per (82)–(84), sinó que en el segon membre de (82) hi ha de figurar la quantitat $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u}$, de manera que resulta una condició més restrictiva (a causa del signe d'aquesta última quantitat). En canvi, en la construcció de Scheffer només es compleix (82). Pel que sembla, aquest marge juga un paper essencial a l'hora de possibilitar que $\boldsymbol{u}$ desenvolupi singularitats.

Val a dir que l'exemple de Scheffer utilitza certes idees d'autosimilaritat que recorden l'intent de Leray en la mateixa direcció (§ 7.2). En el cas de Scheffer, aquesta autosimilaritat dóna lloc a un caràcter «fractal», el qual té un paper essencial de cara a obtenir una dimensió fraccionària positiva del conjunt de singularitats.

Segons Scheffer, es podria aconseguir que la funció $\boldsymbol{f}$ fos infinitament derivable a $\Omega \times [0, T)$, on T representa el primer instant singular. Tanmateix sembla bastant inevitable que $\boldsymbol{f}$ tingui algun tipus de singularitat en l'instant T. Així, doncs, en el fons les singularitats de $\boldsymbol{u}$ són conseqüència de les singularitats de $\boldsymbol{f}$.

11.7 Especialment després de l'exemple precedent, el teorema 8 es pot veure com un intent frustrat de respondre positivament a la pregunta $2'$ (existència i regularitat). Tanmateix, segons l'observació que hem fet a § 11.2, això no treu que tingui força sentit plantejar-se la pregunta 1 dins de la classe de solucions localment dissipatives. D'altra banda, atès que el teorema 7 ja cobreix la part d'existència, només restaria pendent la qüestió de la unicitat:

Pregunta 4. *És cert que el problema d'evolució per a les equacions de Navier-Stokes no té més que una solució localment dissipativa?*

En suport d'una possible resposta positiva a aquesta pregunta es pot adduir que, en determinats casos de la teoria del moviment d'un fluid compressible no viscós, l'aplicació d'una «condició d'entropia» en les singularitats té efectivament la virtut de determinar una sola solució del corresponent problema d'evolució.

12 Epíleg: després de tot, la mecànica celeste tampoc no és perfecta

Per limitacions d'espai i temps, la present exposició ha hagut de deixar de banda moltes altres contribucions interessants que també giren al voltant de la qüestió del determinisme de les equacions de Navier-Stokes. Per a més informació, el lector es pot dirigir a altres monografies, com ara [51–54]. Des d'un punt de vista més històric i humà, també són força interessants les biografies científiques de Carl Oseen, Jean Leray i Olga Ladyzhenskaya [55–66].

Malgrat els notables esforços d'autors posteriors, encara es pot dir que l'estat de la qüestió no ha variat de manera essencial des dels treballs de Jean Leray en 1933–1934. Segons aquest últim, en aquell temps Henri Lebesgue ja va reconèixer que es tractava d'un problema difícil: «No dediqueu massa temps a una qüestió tan rebel. Feu una altra cosa!» Aquesta citació prové de [22], una breu visió retrospectiva que Jean Leray va publicar el 1994 (la qual constitueix el seu últim article). Tal com s'hi assenyala, en els darrers decennis del segle XX s'ha arribat a una situació similar en dos altres casos de la mecànica de fluids, a saber, les equacions de Navier-Stokes per a un fluid viscós i compressible en règim isentròpic i l'equació de Boltzmann de la teoria cinètica de gasos. Com en el cas d'un fluid viscós i incompressible, en aquests dos altres casos també s'ha aconseguit demostrar, d'una banda, l'existència local i la unicitat de solucions clàssiques, i d'altra banda, l'existència global d'algun tipus de solucions generalitzades; tanmateix no s'aconsegueix garantir alhora l'existència global i la unicitat.

Així, doncs, en l'actualitat la mecànica de fluids està realment lluny de poder justificar la possibilitat de fer prediccions a llarg termini. Tal com hem dit a la introducció, el problema podria ser més greu que l'«efecte papallona» que invoquen els meteoròlegs: si s'arribés a veure que un mateix estat inicial pot donar lloc a una multiplicitat de solucions, llavors estaríem davant d'una mena d'«efecte papallona sense papallona».

Certament, el panorama és ben diferent del que hom troba en la mecànica celeste, la qual és capaç de predir eclipsis amb milers d'anys d'antelació. Ben mirat, però, la veritat és que *la mecànica celeste tampoc no és completament determinista* en el sentit que estem demanant a les equacions de Navier-Stokes: Fins i tot en el cas ideal de cossos puntuals, no es pot descartar la possibilitat de col·lisions. Quan la col·lisió només implica dos cossos llavors està demostrat que hi ha una sola manera «raonable» de continuar la solució més enllà de la col·lisió. En la terminologia de la mecànica celeste, es diu que aquestes singularitats són «regularitzables»; en una terminologia més afí a la que hem vingut utilitzant en la present exposició, diríem que hi ha una solució generalitzada que travessa la singularitat sense experimentar cap ramificació. Tanmateix també està demostrat que aquesta afirmació deixa de ser certa per a la major part de les col·lisions triples (vegeu en particular [71]). En aquest cas, tot sovint hi ha diferents maneres possibles de continuar el moviment després de la col·lisió.

Així, doncs, potser després de tot la mecànica de fluids no és tan diferent de la mecànica celeste pel que fa al determinisme. En tot cas, el que passa és que la mecànica celeste coneix bastant bé les seves limitacions, mentre que la mecànica de fluids encara no.

Referències

La llista de referències que segueix ha estat estructurada de manera que reflecteixi la història del problema. És per això que no se segueix un ordre alfabètic, sinó cronològic, i que les referències de caràcter auxiliar són posades al final, agrupades segons la seva funció. Les diverses presentacions d'un mateix treball han estat reunides en un mateix ítem. El símbol $\equiv$ indica una publicació subseqüent del mateix text; el símbol $\gg$ indica una traducció; finalment, el símbol $>$ precedeix la traducció del títol o altres dades bibliogràfiques. En algunes referències, especialment les més antigues, hem distingit entre l'any de publicació i l'any en què es va llegir la memòria o en què es va rebre el manuscrit; en aquest cas, l'any que figura a continuació del nom de l'autor és l'any de lectura o de recepció, mentre que l'any de publicació l'indiquem després del títol del llibre o de la sèrie corresponents.

[1] EULER, L., 1755. «Principes généraux du mouvement des fluides». *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, 11, 274–315. / $\equiv$ *Opera Omnia*, Ser. 2, 12 (1954), 59–91.

[2] NAVIER, C. L., 1822. «Mémoire sur les lois du mouvement dels fluides». *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, 6 (1823, pub. 1827), 389–440.

[3] CAUCHY, A. L., 1822.

[a] «Recherches sur l'équilibre et le mouvement des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques». *Bulletin de la Société Philomatique*, 1823, 9–13.

[b] «Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois de mouvement d'un corps solide, élastique ou non élastique». *Exercices de Mathématiques*, 3 (1828), 160–187.

[4] POISSON, S. D., 1829. «Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides». *Journal de École Polytechnique*, 13 (quadern 20) (1831), 1–174.

[5] BARRÉ DE SAINT-VENANT, A., 1843. «Note à joindre au mémoire sur la dynamique des fluides, présenté le 14 avril 1834». *Comptes-Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, 17, 1240–1243.

[6] STOKES, G. G., 1845. «On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids». *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 8 (1849), part 3, núm. 22, 287–319. / $\equiv$ *Mathematical and Physical Papers* (Cambridge Univ. Press), 1 (1880), 75–129.

[7] STOKES, G. G., 1849. «On the dynamical theory of diffraction». *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 9 (1856), part 1, núm. 1, 1–62. / $\equiv$ *Mathematical and Physical Papers* (Cambridge Univ. Press), 2 (1883), 243–328.

[8] Stokes, G. G., 1850. «On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums». *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 9 (1856) part 2, núm. 10, 8–106. / ≡ *Mathematical and Physical Papers* (Cambridge Univ. Press), 3 (1901), 1–141.

[9] von Helmholtz, H., 1858. «Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen». *J. reine angew. Math.*, 55, 25–55. / ≡ *Wissenschäftliche Abhandlungen* (Leipzig: Johann Ambrosius Barth), 1 (1882), 101–134.

[10] Reynolds, O., 1883. «An experimental investigation of the ciscumstances which determine whether the motion of water will be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels». *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 174, 935–982. / ≡ *Papers on Mechanical and Physical Subjects* (Cambridge Univ. Press), 2 (1899), 51.

[11] Bjerknes, V., 1904. «Das Problem der Wettervorhersage, betrachtet vom Standpunkte der Mechanik und der Physik». *Meteorologische Zeitschrift*, 21, 1–7.

[12] Oseen, C. W., 1910. «Sur les formules de Green généralisées qui se présentent dans l'hydrodynamique et sur quelques-unes de leurs applications». *Acta Math.*, 34, 205–284.

[13] Oseen, C. W., 1910. «Ein Satz über die Singularitäten, welche in der Bewegung einer reibenden und unzusammendrückbaren Flüssigkeit auftreten können». *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, 6, núm. 16, 17 pàgs.

[14] Oseen, C. W., 1910. «Über die Bedeutung der Integralgleichungen in der Theorie der Bewegung einer reibenden, unzusammendrückbaren Flüssigkeit». *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, 6, núm. 23, 19 pàgs.

[15] Oseen, C. W., 1919. «Lösung eines hydrodynamischen Problems». *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, 14, núm. 8, 26 pàgs.

[16] Oseen, C. W., 1927. *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik.* Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft.

[17] Odqvist, F. K. G., 1931. «Beiträge zur Theorie der nichtstationären zähen Flüssigkeitsbewegungen». *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, 22A, núm. 28, 22 pàgs.

[18] Leray, J., 1933. «Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique». *J. Math. Pures Appl.* (Ser. 9), 12, 1–82. / ≡ *Selected Papers - Œuvres Scientifiques* (Springer & Société Mathématique de France), 2 (1997), 18–99.

[19] Leray, J., 1934. «Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois». *J. Math. Pures Appl.* (Ser. 9), 13, 331–418. / ≡ *Selected Papers - Œuvres Scientifiques* (Springer & Société Mathématique de France), 2 (1997), 159–246.

[20] Leray, J., 1934. «Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace». *Acta Math.*, 63, 193–248. / ≡ *Selected Papers - Œuvres Scientifiques* (Springer & Société Mathématique de France), 2 (1997), 100–155.

[21] Leray, J.; Robin, L., 1937. «Complément à l'étude des mouvements d'un liquide visqueux illimité». *C. R. Acad. Sci. Paris*, 205, 18–20. / ≡ *Selected Papers - Œuvres Scientifiques* (Springer & Société Mathématique de France), 2 (1997), 156–158.

[22] Leray, J., 1994. «Aspects de la mécanique théorique des fluides». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. Gén. Vie Sci.*, 11, 287–290.

[23] Hopf, E., 1950. «Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Gleichungen». *Math. Nachr.*, 4 (1951), 213–231. / ≡ *Selected Works* (Amer. Math. Soc. & Oxford Univ. Press, 2003), 193–212, seguit d'un comentari de J. B. Serrin (pàg. 213–220).

[24] Kiselёv, A. A.; (K), Ladyzhenskaya, O. A. (L), 1954–55 [А. А. Киселёв, О. А. Ладыженская].

[a] (K, L) «О решении линеаризованных уравнений плоского нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости». Докл. Акад. Наук СССР, 95 (1954), 1161–1164. / > On the solution of the linearized equations of a plane unsteady flow of a viscous incompressible fluid.

[b] (K) «О решении уравнений описывающих движение несзхимаемой жидкости». Успехи Мат. Наук, 9 (1954), n. 4, 251–254. / > On the solution of the equations describing the motion of an incompressible fluid.

[c] (K) «О нестационарном течении вязкой жидкости при наличии внешних сил». Докл. Акад. Наук СССР, 100 (1955), 871–874. / > On unsteady flow of a viscous fluid in the presence of external forces.

[25] Kiselёv, A. A.; (K), Ladyzhenskaya, O. A. (L), 1955–1957 [А. А. Киселёв, О. А. Ладыженская].

[a] (K) «Решение линеаризированных уравнений нестатсионарного течения вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной области». Докл. Акад. Наук СССР, 101 (1955), 43–46. / > Solution of the linearized equations of unsteady flow of a viscous incompressible fluid in a bounded region.

[b] (K) «Нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной трехмерной области». Докл. Акад. Наук СССР, 106 (1956), 27–30. / > Unsteady flow of a viscous incompressible fluid in a bounded three-dimensional domain.

[c] (K, L) «О существовании и единственности решения нестационарной задачи для вязкой несжимаемой жидкости». Изв. Акад. Наук СССР, Сер. Мат., 21 (1957), 655–680. / ≫ «On the existence and uniqueness of solutions of the non-stationary problems for flows of non-compressible fluids». *Amer. Math. Soc. Transl.* (Ser. 2), 24 (1963), 79–106.

[26] Ladyzhenskaya, O. A., 1958–1959 [О. А. Ладыженская].
[a] «Решение “в целом” краевой задачи для уравнений Навье-Стокса в случае двух пространственных переменных». Докл. Акад. Наук СССР, 123 (1958), 427–429. / ≫ ≪Solution “in the large” of boundary value problems for the Navier-Stokes equations in two space variables≫. *Soviet Phys. Dokl.*, 3, 1128–1131.
[b] «Решение в целом задачи Коши для нестационарного плоского течения вязкой несжимаемой жидкости». Труды Москов. Мат. Общ., 8 (1959), 71–81. / ≫ ≪Solution in the large of the Cauchy problem for a nonstationary plane flow of a viscous, incompressible fluid≫. *Amer. Math. Soc. Transl.* (Ser. 2), 25 (1963), 161–172.
[c] ≪Solution “in the large” of the nonstationary boundary value problem for the Navier-Stokes equations in two space variables≫. *Comm. Pure Appl. Math.*, 12 (1959), 427–433.

[27] Ladyzhenskaya, O. A., 1961–1970 [О. А. Ладыженская]. Математические Вопросы Динамики Вязкой Несжимаемой Жидкости. Фитматгиз, 1961. / ≫ *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. Nova York: Gordon and Breach, 1963. / Segona edició anglesa: Gordon and Breach, 1969. / Segona edició russa: Наука, 1970.

[28] Ladyzhenskaya, O. A., 1966–1967 [О. А. Ладыженская].
[a] «О некоторых нелинейных задачах теории сплошных сред». Труды Международного Конгресса Математиков (Москва - 1966) (Мир, 1968), pàg. 560–573. / ≫ ≪On some nonlinear problems in the theory of continuous media≫. *Amer. Math. Soc. Transl.* (Ser. 2), 70 (1968), 73–88.
[b] «О новых уравнениях для описания движения вязких несжимаемых жидкостей и разрешимости в целом для них краевых задач». Труды Мат. Инст. Стеклов., 102 (1967), 85–104. / ≫ ≪New equations for the description of motion of viscous incompressible fluids and solvability in the large of boundary value problems for them≫. *Proc. Steklov Math. Inst.*, 102 (pub. 1970), 95–118.

[29] Ladyzhenskaya, O. A., 1969 [О. А. Ладыженская]. «Пример неединственности в классе слабых решений Хопфа для уравнений Навье-Стокса». Изв. Акад. Наук СССР, Сер. Мат., 33, 240–247. / ≫ ≪Example of nonuniqueness in the Hopf class of weak solutions for the Navier-Stokes equations≫. *Math. USSR Izvestija*, 3, 229–236.

[30] Ladyzhenskaya, O. A., 1975. ≪Mathematical analysis of Navier-Stokes equations for incompressible liquids≫. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 7, 249–272.

[31] Ladyzhenskaya, O. A., 2003 [О. А. Ладыженская]. «Шестая проблема тысячелетия: уравнений Навье-Стокса, существование и гладкость». Успехи Мат. Наук, 58, n. 2, 45–78. / ≫ «Sixth problem of the millennium: Navier-Stokes equations, existence and smoothness». *Russian Math. Surveys*, 58, n. 2, 251–286.

[32] Golovkin, K. K., 1960 [К. К. Головкин].

[a] «О плоском движении вязкой несжимаемой жидкости». Труды Мат. Инст. Стеклов., 59, 37-86. / ≫ «The plane motion of a viscous incompressible fluid». *Amer. Math. Soc. Transl.* (Ser. 2), 35 (1964), 297–350.

[b] «Теория потенциалов для нестационарных линейных уравнений Навье-Стокса в случае трех пространственных переменных». Труды Мат. Инст. Стеклов., 59, 87–99. / > Potential theory for the non-stationary linear Navier-Stokes equations in the case of three space variables.

[33] Solonnikov, V. A., 1960 [В. А. Солонников]. «Об оценках тензоров Грина для некоторых краевых задач». Докл. Акад. Наук СССР, 130, 988–991. / ≫ «On estimates of Green's tensors for certain boundary problems». *Soviet Math. Dokl.*, 1, 128–131.

[34] Cattabriga, L., 1961. «Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes». *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 31, 308–340.

[35] Kreĭn, S. G., 1953–57 [С. Г. Крейн].

[a] «О функциональных свойствах операторов векторного анализа и гидродинамики». Докл. Акад. Наук СССР, 93 (1953), 969–972. / > On functional properties of operators of vector analysis and hydrodynamics.

[b] «Математические вопросы теории движения твердого тела с полостями, наполненными жидкостью». Труды Третьего Всесоюзного Математического Съезда (1956) (Изд. Акад. Наук СССР, 1958), 1, 205. / > Mathematical problems of the theory of motion of a vessel filled with a fluid.

[c] «Дифференциальные уравнения в Банашовом пространстве и их приложение в гидромеханике». Успехи Мат. Наук, 12 (1957), n. 1, 208–211. / ≫ «Differential equations in a Banach space and their application in hydromechanics». *Amer. Math. Soc. Transl.* (Ser. 2), 16 (1960), 423–426.

[36] Sobolevskiĭ, P. E., 1959–64. [П. Е. Соболевский].

[a] «О нестационарных уравнениях гидродинамики вязкой жидкости». Докл. Акад. Наук СССР, 128 (1959), 45–48. / > On the non-stationary equations of the hydrodynamics of viscous fluids.

[b] «О гладкости обобщенных решений уравнений Навье-Стокса». Докл. Акад. Наук СССР, 131 (1960), 758–760. / ≫ «On the smoothness of generalized solutions of the Navier-Stokes equations». *Soviet Math. Dokl.*, 1, 341–343.

[c] «О применении метода дробных степеней операторов к исследованию уравнений Навье-Стокса». Докл. Акад. Наук СССР, 155 (1964), 50–53. / ≫ ≪The use of fractional powers of operators in studying the Navier-Stokes equations≫. *Soviet Math. Dokl.*, 5, 356–360.

[d] «Исследование уравнений Навье-Стокса методами теории параболических уравнений в Банашовых пространстве». Докл. Акад. Наук СССР, 156 (1964), 745–748. / ≫ ≪Study of the Navier-Stokes equations by the methods of the theory of parabolic equations in Banach spaces≫. *Soviet Math. Dokl.*, 5, 720–723.

[37] S. Itô, 1961. [伊藤清三]

[a] ≪The existence and the uniqueness of regular solution of non-stationary Navier-Stokes equations≫. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* I, 9 (1961), 103–140.

[b] Navier-Stokes 方程式の解の存在. 科学 (岩波), 32 (1962), 82. / > Existence of solutions of Navier-Stokes equations. *Kagaku (Iwanami).*

[c] Navier-Stokes 方程式の正則解の存在と一意性. 数学, 14 (1962/1963), 13–27. / > The existence and the uniqueness of regular solutions of Navier-Stokes equations. *Sûgaku.*

[38] H. Fujita (F), T. Kato (K), 1962–1964. [藤田宏, 加藤敏夫]

[a] (K, F) ≪On the non-stationary Navier-Stokes system≫. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 32 (1962), 243–260.

[b] (F) Navier-Stokes 方程式の初期値問題の解の一意存在 —作用素の分数巾の応用—. 数学, 14 (1962/1963), 65–81. / > The unique existence of solutions for the initial-value problem of Navier-Stokes equations (an application of fractional powers of operators). *Sûgaku.*

[c] (F, K) ≪On the Navier-Stokes initial value problem≫. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 16 (1964), 269–315.

[39] Scheffer, V., 1976.

[a] ≪Géométrie fractale de la turbulence. Équations de Navier-Stokes et dimension de Haussdorff≫. *C. R. Acad. Sci. Paris* A, 282, 121–122.

[b] ≪Turbulence and Haussdorff dimension≫. *Turbulence and Navier Stokes Equations* (ed. R. Temam; Springer): *Lecture Notes in Math.*, 565, 174–183.

[c] ≪Partial regularity of solutions to the Navier-Stokes equations≫. *Pacific J. Math.*, 66, 535–552.

[40] Scheffer, V., 1977. ≪Haussdorff measures and Navier-Stokes equations≫. *Comm. Math. Phys.*, 55, 97–112.

[41] Scheffer, V., 1980. ≪The Navier-Stokes equations on a bounded domain≫. *Comm. Math. Phys.*, 73, 1–42.

[42] Caffarelli, L. (C); Kohn, R. (K); Nirenberg, L. (N), 1982.

[a] (C, K, N) ≪Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations≫. *Comm. Pure Appl. Math.*, 35 (1982), 771–831.

[b] (K) ≪Partial regularity and the Navier-Stokes equations≫. *Nonlinear Partial Differential Equations in Applied Science* (ed. H. Fujita, P. Lax, G. Strang; North-Holland, 1983), pàg. 101–118.

[c] (K) «The method of partial regularity as applied to the Navier-Stokes equations». *Seminar on Nonlinear Partial Differential Equations* (ed. S. S. Chern; Springer, 1984), pàg. 117–128.

[43] KATO, T., 1984. «Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^m$». *Math. Z.*, 187, 471–480.

[44] MASUDA, K., 1984.
[a] «L^2-decay of solutions of the Navier-Stokes equations in the exterior domain». *Nonlinear Functional Analysis and its Applications* (ed. F. E. Browder; Amer. Math. Soc., 1986): *Proc. Sympos. Pure Math.*, 45, part 2, 179–182.
[b] «Weak solutions of the Navier-Stokes equations». *Tôhoku Math. J.*, 36 (1984), 623–646.

[45] SCHEFFER, V., 1985–1987.
[a] «A solution to the Navier-Stokes inequality with an internal singularity». *Comm. Math. Phys.*, 101 (1985), 47–85.
[b] «Solutions to the Navier-Stokes inequality with singularities on a Cantor set». *Geometric Measure Theory and the Calculus of Variations* (ed. W. K. Allard, F. J. Almgren; Amer. Math. Soc., 1986): *Proc. Sympos. Pure Math.*, 44, 359–367.
[c] «Nearly one-dimensional singularities of solutions to the Navier-Stokes inequality». *Comm. Math. Phys.*, 110 (1987), 525–551.
[d] «A self-focusing solution to the Navier-Stokes equations with a speed-reducing external force». *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1986* (ed. A. M. Gleason; Amer. Math. Soc., 1987), 2, 1110–1112.

[46] BELLOUT, H.; BLOOM, F.; NEČAS, J., 1993–1994.
[a] «Solutions for incompressible non-Newtonian fluids». *C. R. Acad. Sci. Paris* I, 317 (1993), 795–800.
[b] «Young measure-valued solutions for non-Newtonian incompressible fluids». *Comm. Partial Differential Equations*, 19 (1994), 1763–1803.

[47] NEČAS, J.; RŮŽIČKA, M.; ŠVERÁK, V., 1996.
[a] «Sur une remarque de Leray concernant la construction de solutions singulières des équations de Navier-Stokes». *C. R. Acad. Sci. Paris* I, 323, 245–249.
[b] «On Leray's self-similar solutions of the Navier-Stokes equations». *Acta Math.*, 176, 283–294.

[48] LIN, F. H., 1998. «A new proof of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg theorem». *Comm. Pure Appl. Math.*, 51, 241–257.

[49] LADYZHENSKAYA, O. A.; SERËGIN, G. A., 1999. «On partial regularity of suitable weak solutions to the three-dimensional Navier-Stokes equations». *J. Math. Fluid Mech.*, 1, 356–387.

[50] DUCHON, J.; ROBERT, R., 1999–2000.
[a] «Dissipation d'énergie pour des solutions faibles des équations d'Euler et Navier-Stokes incompressibles». *C. R. Acad. Sci. Paris* I, 329 (1999), 243–248.
[b] «Inertial energy dissipation for weak solutions of incompressible Euler and Navier-Stokes equations». *Nonlinearity*, 13 (2000), 249–255.

---

[51] GALDI, G. P., 2000. «An introduction to the Navier-Stokes initial-boundary value problem». *Fundamental Directions in Mathematical Fluid Dynamics* (ed. G. P. Galdi, J. G. Heywood, R. Rannacher; Birkhäuser), pàg. 1–70.

[52] FOIAŞ, C.; MANLEY, O.; ROSA, R.; TEMAM, R., 2001. *Navier-Stokes Equations and Turbulence.* Cambridge Univ. Press.

[53] SOHR; H., 2001. *The Navier-Stokes equations. An Elementary Functional Analytic Approach.* Birkhäuser.

[54] CÓRDOBA, D.; FONTELOS, M. A.; RODRIGO, J. L., 2005. «Las matemáticas de los fluidos: torbellinos, gotas y olas». *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 8, 565–595.

---

[55] WALLER, I., 1948. «Carl Wilhelm Oseen: 17/4 1879, 7/11 1944. Minnesteckning». *Kungliga Svenska Vetenskapsakademiens Årsbok*, 46, 357–379. / ≡ *Levnadsteckningar över Kungliga Svenska Vetenskapsakademiens Ledamöter*, 133 (Stockholm: Almqvist & Wiksell, 1950). / > Carl Wilhelm Oseen: 17/4/1879, 7/11/1944. In memoriam.

[56] GRANDIN, K., 1999. *Ett slags modernism i vetenskapen: Teoretisk fysik i Sverige under 1920-talet.* Uppsala Universitet, Institutionen för Idé- och Lärdomshistoria (*Skrifter*, 22). / > A kind of modernism in science: Theoretical physics in Sweden during the 1920s.

[57] MAWHIN, J., 1999. «Jean Leray (1906–1998)». *Bulletin de la Classe des Sciences* (Ser. 6) (Académie Royale de Belgique), 10, 89–98.

[58] KANTOR, J. M. (ED.), 2000. *Jean Leray (1906–1998)*: *Gazette des Mathématiciens*, 84, supplément.

[59] CHEMIN, J. Y., 2000–2004.
[a] «Jean Leray et Navier-Stokes». [58], pàg. 71–82.
[b] «Le système de Navier-Stokes incompressible soixante dix ans après Jean Leray». [62], pàg. 99–123.

[60] ANDLER, M., 2000. «Jean Leray». *Proceedings of the American Philosophical Society*, 144, 470–150.

[61] BOREL, A.; HENKIN, G. M.; LAX, P. D., 2000. «Jean Leray (1906–1998)». *Notices Amer. Math. Soc.*, 47, 350–359.

[62] GUILLOPÉ, L.; ROBERT, D. (ED.), 2004. *Actes des Journées Mathématiques à la mémoire de Jean Leray* (Nantes, 2002): *Séminaires et Congrès* (Société Mathématique de France), 9.

[63] MEYER, Y., 2004. «Jean Leray et la recherche de la vérité». [62], pàg. 1–12.

[64] STRUWE, M., 2002. «Olga Ladyzhenskaya. A life-long devotion to mathematics». *Geometric Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations* (ed. S. Hildebrandt, H. Kracher; Springer, 2003), pàg. 1–10.

[65] SERËGIN, G. A.; URAL'TSEVA, N. N., 2003 [Г. А. Серёгин, Н. Н. Уральцева]. «Ольга Александровна Ладыженская (к восьмидесяттилетию со для рождения)». Успехи Мат. Наук, 58, n. 2, 181–206. / ≫ «Ol'ga Aleksandrovna Ladyzhenskaya (on her 80th birthday)». *Russian Math. Surveys*, 58, n. 2, 395–425.

[66] FRIEDLANDER, S.; LAX, P.; MORAWETZ, C.; NIRENBERG, L.; SERËGIN, G.; URAL'TSEVA, N., VISHIK, M., 2004. «Olga Aleksandrovna Ladyzhenskaya (1922–2004)». *Notices Amer. Math. Soc.*, 51, 1320–1331.

[67] BATCHELOR, G. K., 1967. *An Introduction to Fluid Dynamics.* Cambridge Univ. Press.

[68] DARRIGOL, O., 2002. «Between hydrodynamics and elasticity theory: The first five births of the Navier-Stokes equation». *Arch. Hist. Exact Sci.*, 56, 95–150.

[69] DALMEDICO, A. D., 2001. «History and epistemology of models: Meteorology (1946–1963) as a case study». *Arch. Hist. Exact Sci.*, 55, 395–422.

[70] GLOWINSKI, R.; PAN, T. W.; JUÁREZ V., L. H.; DEAN, E., 2006–2007. «Finite element methods for the numerical simulation of incompressible viscous fluid flow modeled by the Navier-Stokes equations». *Bol. Soc. Esp. Mat. Appl.*, 36, 7–62, 37, 11–46, 38, 11–37.

[71] MC GEHEE, R., 1975. «Triple collision in Newtonian gravitational systems». *Dynamical Systems, Theory and Applications* (ed. J. Moser; Springer): *Lect. Notes in Phys.*, 38, 550–572.

[72] SMALE, S., 1998. «Mathematical problems for the next century». *Mathematical Intelligencer*, 20, n. 2, 7–15. / ≡ *Collected Papers* (ed. F. Cucker, R. Wong; Singapore Univ. Press & World Scientific, 2000), 1, 480–488. / ≡ [73], pàg. 271–294. / ≫ «Problemas matemáticos para el próximo siglo». *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 3 (2000), 413–434.

[73] ARNOLD, V. I.; ATIYAH, M.; LAX, P.; MAZUR, B. (EDS.), 2000. *Mathematics: Frontiers and Perspectives.* International Mathematical Union & American Mathematical Society.

[74] LIONS, P. L., 2000. «On some challenging problems in nonlinear partial differential equations». [73], pàg. 121–135.

[75] ALON, N.; BOURGAIN, J.; CONNES, A.; GROMOV, M.; MILMAN, V. (eds.), 2000. *Visions in Mathematics: Towards 2000* (Actes d'un congrés realitzat a Tel Aviv, 25 agost – 3 setembre 1999). Birkhäuser, 2000 (*Geom. Funct. Anal.* 2000, Special Volume, Part I).

[76] Klainerman, S., 2000.
[a] «PDE as a unified subject». [75], pàg. 279–315.
[b] «Great problems in nonlinear evolution equations. On the analysis of geometric evolution equations». Conferència donada en el congrés [79]. www.math.princeton.edu/~seri/homepage/losangeles/index.htm.

[77] Atiyah, M., 2000. «The Millennium Prize Problems» (vídeo). Conferència donada en el Clay Mathematics Institute Millennium Meeting (Paris, 24–25 May 2000). Springer & Clay Mathematics Institute.

[78] Fefferman, C., 2000. «Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation». Descripció oficial del problema posat a premi pel Clay Mathematics Institute. www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/Official_Problem_Description.pdf.

[79] Browder, F. (org.), 2000. *Mathematical Challenges of the 21st Century*. Congrés organitzat per la American Mathematical Society (Los Angeles, 7–12 August 2000). / Anunci: *Notices Amer. Math. Soc.*, 47 , 324. / Reportatge: *Notices Amer. Math. Soc.*, 47 , 1271–1273.

[80] Engquist, B.; Schmid, W., 2001. *Mathematics Unlimited: 2001 and Beyond*. Springer.

[81] Constantin, P., 2001. «Some open problems and research directions in the mathematical study of fluid dynamics». [80], 353–360.

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Edifici C, Campus Universitari, 08193 Bellaterra
xmora@mat.uab.cat