Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 18, núm. 1, 2003. Pàg. 131–153

Resumació de Borel i teoria de la ressurgència

Tere M. Seara i David Sauzin

1 Introducció

Aquestes notes estan basades en unes xerrades que van tenir lloc al seminari de sistemes dinàmics de la Universitat Autònoma de Barcelona l'any 2002. El que volíem en aquelles xerrades i també en aquest article és relacionar els mètodes clàssics de resumació de Borel de sèries divergents (que introduirem seguint la presentació de [3]) i la més moderna teoria de la ressurgència i veure com ambdós són eines útils en alguns problemes de gran rellevància en la moderna teoria de sistemes dinàmics.

La idea que les sèries divergents poden ser iguals d'útils o més que les sèries amb radi de convergència positiu ja ve de molt antic, com podem veure a la citació següent de Poincaré: «hi ha entre els geòmetres i els astrònoms una mena de malentès respecte el significat de la paraula *convergència*. Els geòmetres, preocupats pel perfecte rigor i sovint molt indiferents a la llargada dels càlculs dels quals en veuen la possibilitat sense fer-los efectivament, diuen que una sèrie és convergent quan la suma dels termes tendeix a un límit determinat, encara que els primers termes disminueixin molt lentament. Els astrònoms, al contrari, tenen costum de dir que una sèrie convergeix quan els vint primers termes, per exemple, disminueixen molt ràpidament, encara que els termes següents podrien créixer indefinidament. Així, per prendre un exemple simple, considerem les dues sèries que tenen per terme general

$$\frac{1000^n}{n!} \quad \text{i} \quad \frac{n!}{1000^n}\,.$$

»Els geòmetres dirien que la primera sèrie convergeix, i de fet que convergeix ràpidament, perquè el terme mil·lionèssim és molt més petit que el 999999*è*; però veurien la segona com divergent, perquè el terme general creix indefinidament.

»En canvi, els astrònoms, veurien la primera sèrie com divergent, perquè els mil primers termes són creixents; i la segona com a convergent, perquè els mil primers termes són decreixents i a més el decreixement és molt ràpid.

»Les dues regles són legítimes, la primera, en les recerques teòriques; la segona, en les aplicacions numèriques: totes dues han de regnar, però en dos dominis separats i les fronteres dels quals és important conèixer.» ([12]).

En els tres exemples que presentem a continuació tindrem el mateix fenomen. Una equació funcional —els exemples seran, de fet, equacions diferencials ordinàries o en derivades parcials— de la qual coneixerem una solució *formal*, és a dir, una solució expressada en sèrie de potències. En tots tres casos, però, la sèrie serà divergent a tot el pla complex. Ens formularem una pregunta molt natural: tenen aquestes sèries alguna relació amb una solució de l'equació funcional de partida? O millor: hi ha alguna solució de l'equació que tingui la nostra sèrie com a desenvolupament de Taylor? i, en cas que existeixi, és possible conèixer-la, saber-ne les propietats més importants? i encara: és única? Algunes d'aquestes preguntes tenen respostes ben conegudes en el cas de les sèries amb radi de convergència positiu i no en tenen cap en el cas d'una sèrie divergent en general. El terme *sèrie divergent* és encara massa ambigu. Per això introduïm la definició següent.

1 Definició *Donada una sèrie de potències* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$*, direm que és de classe Gevrey-*1 *si existeixen dues constants positives* $M > 0$*,* $\rho > 0$*, tals que* $|a_n| \le Mn!\rho^n$*.*

És clar que tota sèrie convergent és de classe Gevrey-1, però per exemple la sèrie: $\sum_{n\in\mathbb{N}} n!x^n$ és Gevrey-1, però divergeix per qualsevol valor de $x \neq 0$.

Com veurem en els exemples que tractarem, si la sèrie formal obtinguda en el nostre problema és de classe Gevrey-1 algunes de les preguntes que hem formulat abans tenen resposta. En aquest article explicarem el mètode (clàssic) de resumació de Borel per tractar aquestes sèries i farem una introducció a la més moderna teoria de la ressurgència d'Ecalle. El lector interessat a conèixer més a fons aquesta teoria, que nosaltres només introduirem per aplicar-la a un exemple força senzill, pot consultar [3], [4], [5] i [6].

2 Tres exemples

Anem a exposar aquí tres problemes similars que es poden resoldre aplicant, entre altres, el mètode de la resumació de Borel i la teoria de la ressurgència d'Ecalle.

2.1 Una equació de Riccati

El primer exemple és l'equació singular de Riccati:

$$\frac{dY}{dz} = Y + H^-(z) + H^+(z)Y^2, \tag{1}$$

on $H^{\pm} \in z^{-1}\mathbb{C}\{z^{-1}\}$, és a dir, germs analítics a l'infinit, que s'anul·len a l'infinit. Ens preguntem en aquest cas per l'existència de solucions d'aquesta equació $Y^{+}(z)$, $Y^{-}(z)$ que s'anul·lin quan $\mathrm{Im}\, z \to -\infty$ o bé quan $\mathrm{Im}\, z \to +\infty$, respectivament.

Escrivint les funcions $H^{\pm}$ en sèrie de potències, hom pot comprovar que aquesta equació admet una única solució formal en sèrie de potències a l'infinit $\widetilde{Y}_{-}(z)$. La sèrie formal que obtenim, en cas de ser convergent, donaria una única solució d'aquesta equació anul·lant-se a ambdós extrems de la recta imaginària. La qüestió de la seva divergència i les seves conseqüències la posposem a l'estudi detallat d'aquesta equació que farem a la secció 5.

2.2 L'equació d'Euler

El segon exemple és l'equació d'Euler:

$$Y'(z) - Y(z) = -\frac{1}{z}, \tag{2}$$

i ens fem la mateixa pregunta que a l'equació de Riccati.

Aquest exemple, en el que tots els càlculs podran fer-se de manera explícita, ens servirà de model per explicar com el mètode de la resumació de Borel pot obtenir molta informació de la solució de l'equació a partir de la sèrie divergent.

Buscant una solució en forma de sèrie a l'infinit: $\widetilde{Y} = \sum_{n\geq 0} \frac{c_n}{z^n}$, i substituint en l'equació obtenim la solució formal:

$$\widetilde{Y} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}},$$

que és una sèrie divergent per a qualsevol z, però que és de classe Gevrey-1 segons la definició 1.

2.3 Trencament de varietats invariants en un pèndol forçat

Finalment, el tercer exemple és el següent: alguns sistemes hamiltonians integrables, quan són pertorbats per un terme ràpidament oscil·lant, es comporten com sistemes propers a sistemes integrables encara que el terme pertorbador no sigui petit: a mesura que la freqüència de la pertorbació esdevé gran, les corresponents zones caòtiques esdevenen extremadament petites.

Sovint, una bona mesura del caos és la grandària del trencament de separatrius relacionat amb una òrbita periòdica hiperbòlica. L'angle entre les separatrius dóna una idea de les zones caòtiques que apareixen prop de la separatriu.

Un exemple típic que presenta aquesta fenomenologia és un pèndol forçat periòdicament amb un període molt petit. Les equacions diferencials són, de fet, un sistema hamiltonià, i un bon model de hamiltonià és la funció periòdica en el temps

$$H_{\mu,\varepsilon}(x,y,t) = \frac{y^2}{2} - 1 + \cos x + \mu(\cos x - 1)\sin(t/\varepsilon), \tag{3}$$

on $\varepsilon > 0$ i $\mu > 0$ són dos paràmetres i només el primer ha de ser petit. El punt d'equilibri inestable del pèndol $(0,0)$ dóna lloc, quan $\mu \neq 0$, a una òrbita $2\pi\varepsilon$-periòdica hiperbòlica que té varietats estables i inestables dos dimensionals, que no coincideixen com passava en el cas $\mu = 0$.

Aquest sistema ja va ésser estudiat per Poincaré [12], que va escriure les varietats estables i inestables com gràfics de diferencials; de fet, aquestes varietats són lagrangianes i admeten equacions $y = \partial_x S^{\pm}(x,t)$, on S^+ i S^- són $2\pi\varepsilon$-periòdiques en t i analítiques per $x > 0$ petit, en el cas de la varietat inestable S^-, i per $x < 2\pi$ prou gran, en el cas de l'estable S^+, i satisfan l'equació de Hamilton-Jacobi:

$$\partial_t S + H_{\mu,\varepsilon}(x, \partial_x S, t) = 0 \tag{4}$$

amb condicions asimptòtiques

$$\lim_{x\to 0} \partial_x S^-(x,t,\mu,\varepsilon) = 0, \quad \lim_{x\to 2\pi} \partial_x S^+(x,t,\mu,\varepsilon) = 0 \tag{5}$$

(per a més detalls, vegeu [13], [10] o [11]). Per estudiar el possible trencament entre les varietats, hem, doncs, d'estudiar la diferència entre dues solucions particulars de l'equació de Hamilton-Jacobi (4).

Si $\mu = 0$, les dues varietats coincideixen i vénen donades per la solució de l'equació corresponent de Hamilton-Jacobi associada al pèndol, que pot ser calculada analíticament: $S_0(x) = 4\,(1 - \cos(x/2))$.

Si $\mu \neq 0$, podem cercar les solucions $S^{\pm}(x,t,\mu,\varepsilon)$ usant el fet que el paràmetre ε és petit. Sembla, doncs, natural buscar aquestes solucions en forma de sèrie de potències

$$S^{\pm}(x,t,\mu,\varepsilon) = S_0(x) + \sum_{n\geq 1} S_n^{\pm}(x, t/\varepsilon, \mu)\varepsilon^n,$$

on les funcions $S_n^{\pm}(x,\tau,\mu)$ han de verificar (5) i ser 2π-periòdiques en τ.

Desenvolupant en sèrie tots el termes de l'equació, hom pot obtenir equacions en derivades parcials que han de verificar les funcions $S_n^{\pm}(x,\tau,\mu)$, i, encara més, resoldre-les. No donarem aquí els detalls dels càlculs, que són senzills però farragosos, però en destacarem un fet essencial en el nostre estudi. Els coeficients $S_n^{+}(x,\tau,\mu)$ obtinguts en el cas de la varietat estable també verifiquen les condicions de vora corresponents a l'inestable!

Així doncs tenim, a tots els ordres, $S_n^{+}(x,\tau,\mu) = S_n^{-}(x,\tau,\mu) = S_n(x,\tau,\mu)$. Això vol dir que el mètode usat no pot distingir entre la varietat estable i la inestable. Una pregunta natural sorgeix: són ambdues varietats idèntiques i per tant no hi ha intersecció transversal entre si? Actualment ja és conegut que aquestes varietats no són idèntiques, per tant això ens porta a la conclusió evident que les sèries obtingudes no poden ser convergents, quan ε és petit, en dominis on ambdues varietats estan definides. De fet, el que succeeix en aquest problema és que les sèries obtingudes són divergents per a tot valor de $\varepsilon > 0$, però són sèries asimptòtiques Gevrey-1 (vegeu la definició 1). És a dir, en el cas de la varietat inestable, existeixen dues constants positives $M > 0$, $\rho > 0$, tals que $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \in (0, 3\pi/2)$, es verifica

$$\left| S^-(x,t,\mu,\varepsilon) - \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon^n S_n(x, t/\varepsilon, \mu) \right| \le MN!\rho^N \varepsilon^N,$$

i una fita anàloga per a la varietat estable $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \in (\pi/2, 2\pi)$. Per tant, tot el que podem deduir del càlculs fets fins ara és que, $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \in (\pi/2, 3\pi/2)$:

$$\left| S^-(x,t,\mu,\varepsilon) - S^+(x,t,\mu,\varepsilon) \right| \le MN!\rho^N \varepsilon^N,$$

per a tot $N > 0$, o, el que és el mateix, la diferència entre les dues varietats és asimptòtica a zero quan ε tendeix a zero. Per tant, el mètode clàssic de buscar les solucions com a sèrie de potències en el paràmetre no és útil per respondre la qüestió de l'existència d'interseccions transversals. Els mètodes que presentarem més endavant permeten entendre aquest fenomen des d'un altre punt de vista i donar eines per al càlcul de la diferència $|S^-(x,t,\mu,\varepsilon) - S^+(x,t,\mu,\varepsilon)|$.

Aquest tercer exemple, malgrat ser, segons el nostre parer, el més interessant, és també el més difícil, ja que les sèries que tractem tenen l'afegitó de ser sèries de potències en una variable ε amb coeficients que depenen de dues variables més (x, t). Com hem vist en el primer exemple podem tenir un fenomen similar si treballem amb funcions d'una sola variable. Detalls sobre la resolució d'aquest exemple poden trobar-se a [9], [10] i [11].

Els tres exemples presentats en aquest capítol tenen una cosa en comú; a tots hem trobat una solució en forma de sèrie que verifica (formalment) tant l'equació com les condicions de vora però que, pel fet que la sèrie obtinguda és divergent per a qualsevol valor de la variable, no pot ser utilitzada, al menys de forma rigorosa, per conèixer propietats de la solució buscada. De fet, ni tan sols en garanteix l'existència.

En el capítol següent presentarem el mètode de la resumació de Borel i en capítols posteriors l'aplicarem als dos últims exemples.

3 Resumació de Borel

3.1 Introducció

Per tal d'introduir la suma de Borel, comencem per recordar el concepte de límit generalitzat d'una successió.

Donades les successions (v_n) de nombres complexos, i (p_n) de nombres reals positius, considerem la successió de mitjanes ponderades:

$$w_n = \frac{p_0 v_0 + p_1 v_1 + \cdots + p_n v_n}{p_0 + p_1 + \cdots + p_n} \tag{6}$$

i ens preguntem sobre la convergència dels w_n.

Hi ha moltes possibilitats a l'hora d'escollir els pesos p_n, sempre que la successió de mitjanes ponderades tingui la propietat de conservar el valor del límit quan la successió de partida v_n ja és convergent.

La idea de Borel és la de donar més importància en la suma (6) als termes amb n més gran. Per això prenem un paràmetre $\lambda > 0$ i prenem com a $p_n = \frac{\lambda^n}{n!}$. Fixem-nos que, amb aquesta definició, el pes més gran correspon a $n \approx \lambda$, per tant, fent λ cada cop més gran obtindrem l'efecte desitjat. Tenint en compte que $\Sigma_{n=0}^{\infty} p_n = e^{\lambda}$, el límit generalitzat seria, per cada valor de λ: $e^{-\lambda}\Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} v_n$. Aconseguim l'efecte ja esmentat de donar més importància als termes amb n més gran amb la definició següent de límit generalitzat:

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} v_n, \tag{7}$$

i es pot veure amb facilitat que si v_n és convergent i té límit v, aleshores el límit generalitzat de Borel és v. És d'esperar, però, que aquest límit pugui existir també per successions no convergents.

Per exemple, la successió $v_n = z^n$, té límit zero si $|z| < 1$, té límit 1, si $z = 1$, i no és convergent si $|z| \geq 1$, $z \neq 1$. Però $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} z^n = e^{\lambda z}$, per a tot $z \in \mathbb{C}$ i, per tant, el límit generalitzat de Borel seria:

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda} e^{\lambda z} = \lim_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda(1-z)} = \begin{cases} 0, & \text{si } \operatorname{Re} z < 1 \\ 1, & \text{si } z = 1\,. \end{cases}$$

Fixem-nos, doncs, que el límit generalitzat de Borel ha permès estendre la definició de límit de la successió z^n fora del disc unitat, concretament al semiplà del pla complex $\operatorname{Re} z < 1$, conservant els valors del límit clàssic en els casos que la successió ja convergia.

El mètode de resumació de Borel d'una sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ consisteix a aplicar el límit generalitzat de Borel a les seves sumes parcials $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$, $S_0 = 0$

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} S_n = \lim_{\lambda\to\infty} S(\lambda). \tag{8}$$

Podem obtenir una expressió més útil d'aquesta expressió si suposem que $S(\lambda)$ està ben definida per a tot $\lambda > 0$, i calculem la seva derivada:

$$S'(\lambda) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (S_{n+1} - S_n) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} u_n,$$

d'aquí, usant que $S(0) = S_0 = 0$, obtenim $S(\lambda) = \int_0^{\lambda} e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} u_n d\alpha$. Si ara fem tendir λ a infinit obtenim la definició de suma generalitzada de Borel.

2 Definició *Anomenem suma generalitzada de Borel o resumació de Borel de la sèrie* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *a*

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} u_n d\alpha.$$

Òbviament, perquè aquesta definició tingui sentit cal demanar algunes condicions a la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} u_n$. Caldrà que tingui radi de convergència no nul, i que es prolongui fora del disc de convergència, a una funció $f(\alpha)$ analítica en un entorn de la semirecta real positiva. D'altra banda, també caldrà que aquesta funció $f(\alpha)$ no creixi «massa» a l'infinit, per tal de poder calcular la integral en la definició 2. Tot això ho especificarem més rigorosament a continuació.

En els exemples que ens interessen treballarem amb sèries de potències. Considerem una sèrie de potències en $1/z$ sense terme constant: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}$, aleshores la seva resumada de Borel és la sèrie:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{a_n}{z^{n+1}} d\alpha,$$

fent el canvi $\zeta = \alpha/z$, obtenim

$$\int_0^{\infty} e^{-z\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \zeta^n d\zeta = \int_0^{\infty} e^{-z\zeta} \hat{f}(\zeta) d\zeta,$$

on $\hat{f}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \zeta^n$. Així doncs resumació de Borel de la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}$ ha resultat ser la transformada de Laplace, en cas que existeixi, de la funció $\hat{f}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \zeta^n$.

Ara bé, si recordem les regles bàsiques de les transformades de Laplace, observem que la transformada de ζ^n és $\frac{n!}{z^{n+1}}$, és a dir, que la funció $\hat{f}(\zeta)$ no és més que l'antitransformada de Laplace, també anomenada de Borel, *formal*, és a dir, terme a terme, de la sèrie de partida.

Així podem donar una *recepta* per calcular la resumació de Borel d'una sèrie de potències $\tilde{f} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}$.

1. Calculem la seva *transformada de Borel formal* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \zeta^n$.
2. Si aquesta nova sèrie té radi de convergència no nul ens definirà una funció $\hat{f}(\zeta)$ en un entorn de l'origen.
3. Si $\hat{f}(\zeta)$ té prolongació analítica en un entorn de l'eix real positiu, la resumació de Borel de $\tilde{f}$ vindrà donada per $S(\tilde{f}) = \int_0^{+\infty} e^{-z\zeta} \hat{f}(\zeta) d\zeta$ en cas que aquesta existeixi.

Per acabar aquest apartat calculem la resumació de Borel d'algunes sèries ben senzilles:

La sèrie geomètrica $\tilde{f} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$. En aquest cas $\hat{f}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} = e^{\zeta}$ i per tant $S(\tilde{f}) = \int_0^{\infty} e^{-z\zeta} e^{\zeta} d\zeta$, sempre que Re $z > 1$. Així doncs, el mètode de la resumació de Borel ens ha permès *resumar* la sèrie geomètrica més enllà del seu disc de convergència i obtenir la seva prolongació analítica, que de fet és la funció $\frac{1}{z-1}$ al semiplà Re $z > 1$.

El segon cas és una sèrie divergent a tot el pla complex, però de classe Gevrey-1: $\tilde{g} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{z^{n+1}}$. En aquest cas $\hat{g}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\zeta^n = \frac{1}{1+\zeta}$, si $|\zeta| < 1$, i es pot prolongar analíticament a tot el pla complex excepte en $\zeta = -1$. Per tant, $S(\tilde{g}) = \int_0^{\infty} e^{-z\zeta}\frac{1}{1+\zeta}d\zeta$, dóna una funció analítica en el semiplà $\operatorname{Re} z > 0$.

El tercer cas és una sèrie divergent a tot el pla complex, i que no és de classe Gevrey-1: $\tilde{h} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{z^{n+1}}$. En aquest cas $\hat{h}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\zeta^n$, i aquesta funció també té radi de convergència zero, així que la resumació de Borel no es pot utilitzar. Sembla clar que el conjunt de sèries de classe Gevrey-1 és el conjunt òptim per usar aquest mètode de la resumació de Borel.

La pregunta que ens fem ara és la següent: Quina relació hi ha entre les sèries —formals— de partida i las funcions resumades, en cas que existeixin?

3.2 Resumació de Borel de sèries Gevrey

En aquesta secció donarem alguns resultats interessants sobre la resumació de Borel quan la sèrie de partida és una sèrie de potències de classe Gevrey-1. Val a dir que tot el que direm aquí pot ser generalitzat a un conjunt més gran de sèries i les proves es poden trobar tant a textos clàssics com, per exemple, a [1].

Denotem per $\mathbb{C}[[z^{-1}]]$ el conjunt de sèries de potències formals en z^{-1} amb coeficients complexos i per $z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$ el subconjunt de sèries sense terme constant. És clar que $\mathbb{C}[[z^{-1}]]$ és una àlgebra commutativa respecte al producte formal de sèries i una àlgebra diferencial respecte de la derivació formal, terme a terme, de sèries.

La proposició següent és una conseqüència immediata de la definició 1.

3 Proposició *Donada $\tilde{f} = \sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{z^{n+1}} \in z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$ una sèrie Gevrey-1, aleshores la seva transformada de Borel formal $\hat{f}(\zeta) = \mathcal{B}\tilde{f}(\zeta)$ defineix una funció analítica en un disc centrat a l'origen $\zeta = 0$.*

4 Definició *Donada una funció $\hat{f}(\zeta)$ analítica a un sector $\mathbf{S}_\delta$ per algun $\delta > 0$, on $\mathbf{S}_\delta = \{\zeta \in \mathbb{C}\ ;\ |\arg\zeta| < \delta/2\}$, direm que té creixement exponencial τ, si existeix una constant $C > 0$ tal que $|\hat{f}(\zeta)| \leq Ce^{\tau|\zeta|}$, $\forall\zeta \in \mathbf{S}_\delta$.*

La proposició següent és un primer resultat rigorós d'existència de resumades de Borel per algunes sèries Gevrey.

5 Proposició *Sigui $\tilde{f} = \sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{z^{n+1}} \in z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$ una sèrie Gevrey-1 tal que la seva transformada de Borel formal $\hat{f}(\zeta) = \mathcal{B}\tilde{f}(\zeta)$ té prolongació analítica a un sector $\mathbf{S}_\delta$ per algun $\delta > 0$, i té creixement exponencial τ.*

Sigui $f(z) = \int_0^{\infty} e^{-z\zeta}\hat{f}(\zeta)d\zeta$ la seva resumació de Borel. Aleshores:

1. *f és una funció analítica en $M_\tau = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \operatorname{Re} z > \tau\}$.*

2. *Per a tot* $0 < \alpha < \pi$, $f(z)$ *és asimptòtica Gevrey-1 a la sèrie* $\widetilde{f}$ *en* $M_\tau \cap \mathbf{S}_\alpha$, *és a dir, existeixen constants positives* C_0 *i* ρ_0, *tals que, per a tot* $N \in \mathbb{N}$,

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{z^{n+1}} \right| \le C_0 \frac{\rho_0^N N!}{|z|^{N+1}}, \quad z \in M_\tau \cap \mathbf{S}_\alpha.$$

La proposició següent ens dóna una caracterització de les possibles resumacions d'una sèrie Gevrey-1. En particular, tindrem unicitat si el sector és prou gran.

6 Proposició *Siguin* f *i* g *funcions analítiques en un sector* $\mathbf{S}_\alpha$. *Aleshores:*

1. *Si* f *i* g *són asimptòtiques Gevrey-1 a la mateixa sèrie en* $\mathbf{S}_\alpha$, *aleshores la funció* $h(z) = f(z) - g(z)$ *és asimptòtica Gevrey-1 a la sèrie* 0 *en* $\mathbf{S}_\alpha$, *i verifica*
$$|h(z)| \le c_1 e^{-c_2|z|}, \quad z \in \mathbf{S}_\alpha$$
per a certes constants c_1, c_2 *positives.*
2. *Si* $\alpha > \pi$ *aleshores* $h(z) = 0$.

4 Resolució de l'equació d'Euler

Si considerem la solució formal $\widetilde{Y} = \sum_{n\ge 0} \frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}}$ de l'equació d'Euler, és clar que és una sèrie Gevrey-1 que té per transformada de Borel formal la sèrie $\sum_{n\ge 0}(-1)^n \zeta^n$. Aquesta sèrie és convergent en el disc unitat, es pot estendre analíticament per la funció $\widehat{Y}(\zeta) = \frac{1}{1+\zeta}$ a tot sector que no contingui els reals negatius i té creixement exponencial 0 (vegeu la definició 4). Estem, doncs, en condicions d'aplicar la proposició 5 i per tant $\widetilde{Y}$ pot ser resumada. De fet, en aquest cas, la resumada es pot obtenir explícitament

$$S(\widetilde{Y})(z) = Y(z) = \int_0^\infty e^{-z\zeta} \frac{1}{1+\zeta} d\zeta,$$

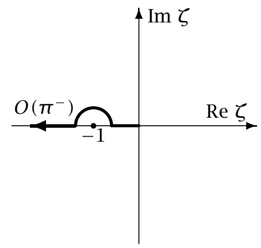
i és una funció analítica en el semiplà $\pi_0 = \{z \in \mathbb{C}\,;\ z = re^{i\alpha}, -\pi/2 < \alpha < \pi/2\}$.

Per entendre el fenomen de la unicitat de resumades, considerem ara la transformada de Laplace de $\widehat{Y}(\zeta)$, però deformant lleugerament el camí d'integració a $\arg \zeta = \theta$, amb $0 < \theta < \pi$ fixat. Obtenim així una funció

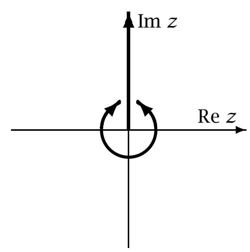
$$S_\theta(\widetilde{Y})(z) = Y^\theta(z) = \int_0^{e^{i\theta}.\infty} e^{-z\zeta} \frac{1}{1+\zeta} d\zeta,$$

que és analítica en el semiplà bisecat per la direcció conjugada $\pi_\theta = \{z \in \mathbb{C}\,;\ z = re^{i\alpha}, -\theta - \pi/2 \le \alpha \le -\theta + \pi/2\}$.

Per als $z \in \pi_0 \cap \pi_\theta$, tenim doncs definides dues funcions $Y(z)$ i $Y^\theta(z)$ que, pel teorema de Cauchy, són iguals. Aquest mètode ens permet continuar analíticament la funció $Y(z) = S(\widetilde{Y})(z)$ al semiplà $\pi^- = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ z = re^{i\alpha}, -3\pi/2 \le \alpha < -\pi/2\}$, és a dir, als valors de z amb part real negativa. Cal parar atenció al fet que, com a consequència que $\hat{Y}$ té un pol a $\zeta = -1$, no podem prendre $\theta = \pi$ en les integrals, però podem definir la continuació de la resumada al semiplà negatiu prenent el camí $O(\pi^-)$ que segueix el semieix negatiu i «volta» el punt $\zeta = -1$ per la dreta (vegeu la figura).

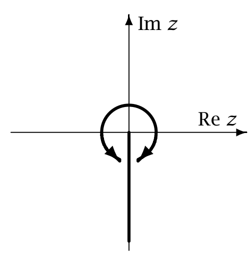


Hem obtingut, doncs, la prolongació analítica a $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ z = re^{i\alpha}, -3\pi/2 \le \alpha < \pi/2\}$, és a dir, al pla tallat:



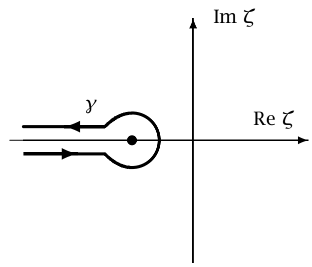
Al semiplà $\operatorname{Re} z \ge 0$ (o bé $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ z = re^{i\alpha}, -\pi/2 \le \alpha < \pi/2\}$) la funció ve donada per $Y(z) = \int_0^\infty e^{-z\zeta} \frac{1}{1+\zeta} d\zeta$, i al semiplà $\operatorname{Re} z \le 0$ (o bé $\{z \in \mathbb{C}\ z = re^{i\alpha}, -3\pi/2 < \alpha \le \pi/2\}$) la funció ve donada per $Y^{\pi^-}(z) = \int_{O(\pi^-)} e^{-z\zeta} \frac{1}{1+\zeta} d\zeta$.

Podem calcular una altra prolongació analítica de $Y(z)$ si ara comencem a deformar els camins d'integració per $-\pi < \theta \le 0$ i obtindrem una prolongació analítica a $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ z = re^{i\alpha}, -\pi/2 \le \alpha < 3\pi/2\}$, és a dir, al pla tallat:



Al semiplà $\mathrm{Re}\, z \geq 0$ (o bé $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ z = re^{i\alpha}, -\pi/2 \leq \alpha < \pi/2\}$) la funció ve donada per $Y(z) = \int_0^\infty e^{-z\zeta} \frac{1}{1+\zeta} d\zeta$, i al semiplà $\mathrm{Re}\, z \leq 0$ (o bé $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ z = re^{i\alpha}, -\pi/2 \leq \alpha < 3\pi/2\}$) la funció ve donada per $Y^{\pi^+}(z) = \int_{O(\pi^+)} e^{-z\zeta} \frac{1}{1+\zeta} d\zeta$, on ara el camí $O(\pi^+)$ volta la singularitat $\zeta = -1$ per l'esquerra.

Així, al sector $\mathrm{Re}\, z < 0$ tenim dues prolongacions analítiques de $Y(z)$ que són asimptòtiques a la sèrie $\widetilde{Y}(z)$ de partida. La proposició 6 ens diu que, atès que les dues són asimptòtiques a la mateixa sèrie Gevrey-1 en un sector d'amplada estrictament menor que π, la seva diferència no ha de ser obligatòriament zero, però ha de ser exponencialment petita. Una aplicació immediata de la teoria d'integració i el teorema del residu ens permet calcular aquesta diferència. Definim γ com el camí de la figura



i tenim

$$\begin{aligned} Y^{\pi^-}(z) - Y^{\pi^+}(z) &= \int_{O(\pi^-)} e^{-z\zeta} \frac{1}{1+\zeta} d\zeta - \int_{O(\pi^+)} e^{-z\zeta} \frac{1}{1+\zeta} d\zeta \\ &= \int_\gamma e^{-z\zeta} \frac{1}{1+\zeta} d\zeta = 2\pi i\, \mathrm{Res}(e^{-z\zeta} \frac{1}{1+\zeta})_{\zeta=-1} = 2\pi i e^z. \end{aligned}$$

Tot el que hem calculat explícitament en l'equació d'Euler és un fenomen general, tal com indiquen les proposicions 5 i 6.

La resumació en rectes complexes (Laplace) dóna funcions analítiques en sectors d'amplada més gran que π però s'introdueixen ambigüitats en la sumació: a la intersecció dels sectors les resumades *no* han de coincidir (són funcions multivaluades).

La presència dels punts de ramificació que tenen aquestes funcions està lligada a la presència de singularitats (de $\widehat{Y}(\zeta)$) al pla complex de Borel. Així doncs, per entendre les possibles resumacions d'una sèrie formal, cal poder analitzar les singularitats de la prolongació analítica de la seva transformada (formal) de Borel.

Jean Ecalle ha formulat la teoria de la ressurgència basada en el fet que les sèries divergents que apareixen en problemes naturals (equacions diferencials o en diferències, iteracions, etc.) tenen transformades de Borel amb singularitats analitzables. Per fer aquesta anàlisi Ecalle va construir un càlcul diferencial (el *càlcul diferencial estranger*) dins una àlgebra de funcions: *les funcions ressurgents*.

En el capítol següent d'aquesta exposició donarem una idea d'aquesta teoria adaptant-la al cas més senzill no trivial: l'equació de Riccati (1).

5 Ressurgència en l'equació de Riccati

5.1 Introducció

Com veurem en aquesta secció, la teoria de la ressurgència d'Ecalle permetrà analitzar totes les equacions d'aquest tipus. De fet aquesta teoria permet la classificació analítica d'equacions més generals [4], [5], [3] i [8], però aquestes equacions de Riccati són un exemple senzill que ens permetrà introduir aquesta teoria aprofitant les simplificacions que aquestes equacions permeten.

La presentació dels resultats d'aquesta secció segueix part de l'article [2], que al seu torn va ser directament inspirat per J. Ecalle (notes escrites i converses).

Com ja hem dit en la presentació d'aquest exemple, degut al fet que H^+ i H^- són germs analítics que s'anul·len a l'infinit, l'equació (1) admet una única solució dins l'espai de sèries formals en potències negatives de la variable que denotem per $\tilde{Y}_- \in z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$.

El teorema següent prova l'existència, les propietats analítiques i l'asimptoticitat a la sèrie $\tilde{Y}_-$ de les dues solucions de l'equació (1).

7 Teorema 1. *L'equació (1) admet una única solució $Y^+(z)$ analítica en un entorn sectorial de $-i\cdot\infty$ tal que $\lim_{\mathrm{Im}\, z\to-\infty} Y^+(z) = 0$.*
Aquesta funció és analítica a $\mathbb{C} - \{iz, z \in \mathbb{R}^+\}$, i és asimptòtica a la solució formal de l'equació en qualsevol sector de la forma $\{z = re^{i\alpha}, r > \rho, -3\pi/2+\delta \le \alpha \le \pi/2-\delta\}$, on $0<\delta<\pi$, i $\rho>0$, suficientment gran.

2. *L'equació (1) admet una única solució $Y^-(z)$ analítica en un entorn sectorial de $+i\cdot\infty$ tal que $\lim_{\mathrm{Im}\, z\to+\infty} Y^-(z) = 0$.*
Aquesta funció és analítica a $\mathbb{C} - \{iz, z \in \mathbb{R}^-\}$, i és asimptòtica a la solució formal de l'equació en qualsevol sector de la forma $\{z = re^{i\alpha}, r > \rho, -\pi/2+\delta \le \alpha \le 3\pi/2-\delta\}$, on $0<\delta<\pi$, i $\rho>0$, suficientment gran.
3. *Existeix un nombre complex A^-, que depèn de H^+ i H^- tal que:*

$$Y^+(z) - Y^-(z) = A^- e^z (1 + O(z^{-1})), \quad \textit{si}\ \mathrm{Re}\, z \le 0. \tag{9}$$

La teoria de la ressurgència només ens garanteix l'existència de la constant A^- en la fórmula (9). Aquesta constant és, en general, una funció transcendent de H^+ i H^-. Val a dir, però, que per a algunes funcions $H^\pm$ particulars hom pot arribar a calcular el valor exacte de A^-. Per exemple, en el cas d'equacions de la forma

$$\frac{dY}{dz} = Y - \frac{1}{2\pi i z}(B^- + B^+Y^2),$$

és a dir, $H^{\pm} = -\dfrac{B^{\pm}}{2\pi i z}$, un càlcul independent d'aquesta teoria dóna $A^{-} = B^{-} \cdot \sigma(B^{-} \cdot B^{+})$, on $\sigma(b) = \dfrac{2}{\sqrt{b}} \sin \dfrac{\sqrt{b}}{2}$.

5.2 Ressurgència de la solució formal

Veurem que $\widetilde{Y}_{-}$ és una sèrie divergent usant la transformada formal de Borel $\mathcal{B}$, definida per

$$\begin{array}{ccc} z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]] & \to & \mathbb{C}[[\zeta]] \\ z^{-n-1} & \mapsto & \zeta^{n}/n!\,. \end{array}$$

Recordem que $\mathcal{B}$ envia sèries formals de classe Gevrey-1 a germs analítics a l'origen i transforma el producte de sèries en convolució de funcions: si $\widetilde{\varphi}_i(z) \to \widehat{\varphi}_i(\zeta)$, $i = 1, 2$, aleshores $\widetilde{\varphi}_1(z)\widetilde{\varphi}_2(z) \mapsto \widehat{\varphi}_1 * \widehat{\varphi}_2(\zeta) = \int_0^{\zeta} \widehat{\varphi}_1(\zeta_1)\widehat{\varphi}_2(\zeta - \zeta_1)d\zeta_1$.

Recordem també que una sèrie formal $\widetilde{\varphi}(z)$ convergeix per a $|z| > \tau_0$ si i només si la seva transformada de Borel és una funció entera de creixement exponencial de tipus τ: $|\widehat{\varphi}(\zeta)| \leq \text{const}\; e^{\tau|\zeta|}$, per a $\tau > \tau_0$. Per tant, el fet que $\widehat{\varphi}$ tingui radi de convergència finit (i per tant singularitats en el pla ζ) implica que $\widetilde{\varphi}$ és divergent.

Donem ara una primera definició de funció ressurgent.

8 Definició *Anomenem* funció ressurgent *a una sèrie formal Gevrey-1 $\widetilde{\varphi} \in z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$ tal que la seva transformada de Borel formal $\widehat{\varphi}$ té la propietat següent: en cada recta sortint de l'origen, existeix un conjunt finit de punts (singulars) tals que $\widehat{\varphi}$ pot ser continuada analíticament al llarg de qualsevol camí sortint de l'origen que segueixi suficientment a prop la línia, voltant (per la dreta o per l'esquerra) els punts singulars.*

Un fet no trivial és la prova rigorosa de l'estabilitat per convolució d'aquesta propietat. De fet, les funcions ressurgents formen una subàlgebra de $\mathbb{C}[[z^{-1}]]$ (*el model formal*). La transformada de Borel $\widehat{\varphi}$ d'una funció ressurgent $\widetilde{\varphi}$ és sovint anomenada el seu *menor*.

9 Proposició *La solució formal $\widetilde{Y}_{-}(z)$ de (1) és una funció ressurgent, i la seva transformada de Borel $\widehat{Y}_{-}(\zeta)$ té singularitats en el model convolutiu sobre els enters negatius.*

Demostració: El que farem per estudiar la transformada de Borel de la nostra sèrie és fer la transformada de Borel de l'equació (1) usant les regles elementals de la transformada de Borel (diferenciació respecte de z dóna lloc a la multiplicació per $-\zeta$) i obtenim una equació per $\widehat{Y}_{-}$:

$$-(\zeta + 1)\widehat{Y}(\zeta) = \widehat{H}^{-} + \widehat{H}^{+} * \widehat{Y}^{*2}\,, \tag{10}$$

on $\widehat{H}^{+}$ i $\widehat{H}^{-}$ són sèries amb radi de convergència infinit.

Definim inductivament una successió de $\mathbb{C}[[\zeta]]$ per

- $\hat{Y}_0(\zeta) = -\hat{H}^-(\zeta)/(\zeta+1)$
- $\forall n \geq 1$,

$$\hat{Y}_n(\zeta) = \frac{-1}{\zeta+1}(\hat{H}^+ * \sum_{n_1+n_2=n-1} \hat{Y}_{n_1} * \hat{Y}_{n_2}).$$

Observem que $\hat{Y}_n$ és una sèrie que comença, al menys, per termes de grau $2n$, i per tant, la sèrie $\sum_{n\geq 0} \hat{Y}_n$ convergeix formalment en $\mathbb{C}[[\zeta]]$ cap a l'única solució $\hat{Y}_-$ de (10).

Observem també que $\hat{H}^+$ i $\hat{H}^-$ defineixen funcions enteres; per tant $\hat{Y}_0$ defineix una funció meromorfa amb un pol simple a -1.

Hom pot estudiar el comportament de les singularitats respecte la convolució (vegeu, per exemple [3]) i obtenim que les úniques possibles singularitats de les funcions $\hat{Y}_n$ són pols simples i punts de ramificació (singularitats logarítmiques) als enters negatius.

En particular, per a cada enter n, $\hat{Y}_n$ és analítica en el recobriment universal de $\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N}^*)$. Amb algun treball tècnic hom pot provar que la sèrie de funcions holomorfes $\sum \hat{Y}_n$ és uniformement convergent a tot compacte d'aquest recobriment universal (vegeu, per exemple, [10] per a una prova detallada d'aquest fet en un cas similar). Per tant, $\hat{Y}_-$ és convergent prop de l'origen i compleix les propietats que fan que la solució formal $\tilde{Y}_-(z)$ sigui una funció ressurgent.

D'altra banda, usant el fet que $\hat{H}^+$ i $\hat{H}^-$ tenen creixement exponencial en qualsevol direcció, s'obtenen fites exponencials a qualsevol sector $S_\delta^+ = \{\zeta \in \mathbb{C}^* / -\pi+\delta \leq \arg\zeta \leq \pi-\delta\}$ (on δ és un angle petit):

$$\forall \zeta \in S_\delta^+,\ |\hat{Y}_-(\zeta)| \leq \text{const}\, e^{\tau|\zeta|},$$

on τ depèn del radi de convergència de H^+ i H^- i de δ. □

Observació La definició de funció ressurgent no demana que les singularitats trobades per les continuacions analítiques siguin de cap tipus especial. Donem ara una nova definició.

10 Definició *Anomenem* funció ressurgent simple *a una funció ressurgent $\tilde{\varphi}(z)$ tal que el seu menor $\hat{\varphi}(\zeta)$ només té singularitats de la forma:*

$$\hat{\varphi}(\omega+\zeta) = \frac{c}{2\pi i\zeta} + \hat{\psi}(\zeta)\frac{\log\zeta}{2\pi i} + \hat{R}(\zeta),$$

on $c \in \mathbb{C}$ i $\hat{\psi}, \hat{R} \in \mathbb{C}\{\zeta\}$.

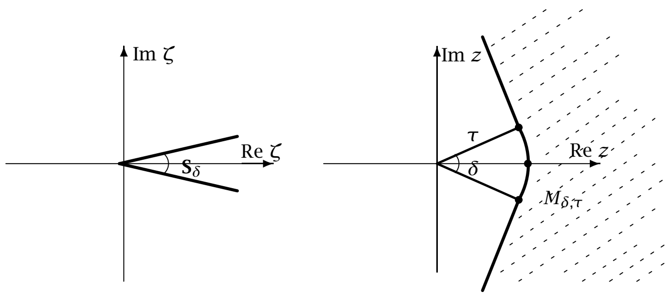
Les funcions ressurgents simples formen una subàlgebra. Tant $\tilde{Y}_-$ com unes altres funcions ressurgents que apareixeran aquí hi pertanyen.

Recordem que si tenim una sèrie Gevrey-1 $\tilde{\varphi}(z)$ tal que el seu menor $\hat{\varphi}(\zeta)$ és analític de tipus exponencial τ en un sector que conté la direcció θ, podem calcular la *transformada de Laplace* en la direcció θ:

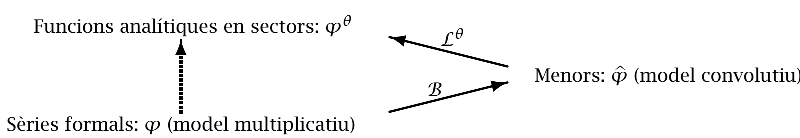
$$\mathcal{L}^\theta:\ \hat{\varphi}(\zeta) \mapsto \varphi^\theta(z) = \int_0^{e^{i\theta}\cdot\infty} \hat{\varphi}(\zeta)e^{-z\zeta}d\zeta,$$

i obtenir una funció φ^θ analítica en el semiplà: Re $(ze^{i\theta}) > \tau$. Si $\hat{\varphi}$ té creixement exponencial i no té singularitats en un sector $\mathbf{S}_\delta$ d'obertura δ (en el pla ζ), movent la direcció d'integració i usant el teorema de Cauchy obtenim una funció analítica en

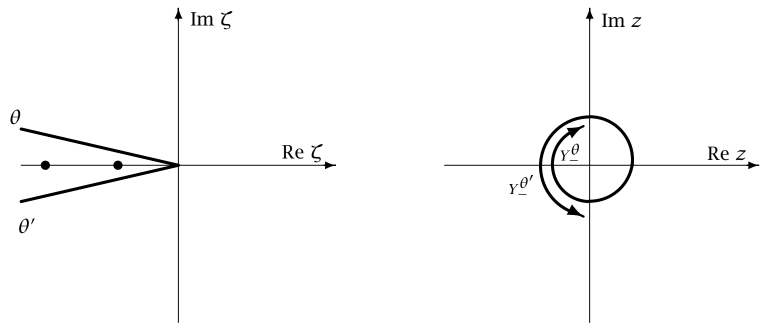
$$M_{\delta,\tau} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Re}\,(ze^{i\theta}) > \tau\,,\ \forall\, \theta \in \mathbf{S}_\delta\}\,.$$



A més, una petita variant de la proposició 5 ens diu que en qualsevol $M_{\delta',\tau}$, amb $\delta' < \delta$, $\varphi^\theta(z)$ és asimptòtica Gevrey-1 a la sèrie $\tilde{\varphi}(z)$ de partida. Així, triant diferents valors de θ, és possible associar a la sèrie formal $\tilde{\varphi}(z)$ una família de funcions analítiques en sectors $\{\varphi^\theta(z)\}$. Val a dir que quan la sèrie de partida $\tilde{\varphi}$ és convergent, les diferents φ^θ donen lloc al mateix germ analític a infinit: la suma de $\tilde{\varphi}$. En general, el pas de $\tilde{\varphi}$ a φ^θ mitjançant $\mathcal{L}^\theta \circ \mathcal{B}$ és el que ja hem definit anteriorment com el procés de *resumació*, i el podem sumaritzar en el diagrama següent:



Aplicant la transformada de Laplace $\mathcal{L}^\theta$ a $\hat{Y}_-$ amb $\theta \in]-\pi, \pi[$, obtenim una funció analítica definida en un entorn sectorial d'infinit d'obertura 3π en el pla z, que és una solució de l'equació de partida (1). En particular, tal com passava en l'equació d'Euler, tenim dues continuacions analítiques diferents d'aquesta funció, és a dir, dues sumacions diferents de la sèrie formal $\tilde{Y}_-$ en el semiplà $\{\mathrm{Re}\, z < 0\}$ prop d'infinit: Y_-^θ amb θ prop de π, que correspon a la solució $Y^+(z)$ del teorema 7, i $Y_-^{\theta'}$ amb θ' prop de $-\pi$, que correspon a la solució $Y^-(z)$ del teorema 7 com es mostra a la figura:



El pas següent és calcular la diferència $Y_-^{\theta'} - Y_-^{\theta}$. Aquest càlcul, a diferència del que succeïa en l'equació d'Euler, no és en cap cas trivial a causa de la complexitat de la superfície de Riemann de la continuació analítica de la funció $\hat{Y}_-$. Per poder fer aquest càlcul, encara que sigui de manera aproximada, cal poder analitzar les singularitats del menor $\hat{Y}_-$.

Com veurem, la teoria de la ressurgència arribarà a donar una anàlisi detallada d'aquestes singularitats, mitjançant una sèrie de càlculs que es faran tots en el model formal. Aquest fet, una mica sorprenent, és la base del càlcul diferencial estranger d'Ecalle.

5.3 Integral formal

En aquesta secció estudiarem el que podríem dir és la *solució general formal*, també anomenada *integral formal* de l'equació (1). Com que l'equació de Riccati és una equació de primer ordre, sembla natural buscar aquesta solució $\tilde{Y}(z,u)$ depenent d'un paràmetre u, i, com la busquem en el pla purament formal, la *integral formal* serà una sèrie de potències en el paràmetre u.

Un cop fem els càlculs necessaris per tal que $\tilde{Y}(z,u)$ satisfaci l'equació de Riccati formalment, i aquí sí que utilitzarem fortament l'estructura de l'equació de Riccati, que permetrà simplificacions importants, veurem que la *integral formal* és de la forma:

$$\tilde{Y}(z,u) = \sum_{n\geq 0} u^n e^{nz} \tilde{\varphi}_n(z) \in \mathbb{C}[[z^{-1}, ue^z]],$$

on $\tilde{\varphi}_0(z) = \tilde{Y}_-(z)$ i tots els coeficients $\tilde{\varphi}_n(z)$ seran funcions ressurgents simples. Fixem-nos que l'existència de la integral formal també ens dóna el resultat següent: l'equació de Riccati (1) és formalment conjugada a l'equació d'Euler homogènia

$$\frac{dX}{dz} = X \tag{11}$$

a través del difeomorfisme formal $Y = \Phi(z,X) = \sum_{n\geq 0} X^n \tilde{\varphi}_n(z) \in \mathbb{C}[[z^{-1}, X]]$. La proposició següent establirà l'existència de la integral general i en donarà una forma més senzilla:

11 Proposició *Existeixen sèries de potències formals* $\widetilde{Y}_+ \in z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$ *i* $\widetilde{Y}_0(z) \in 1 + z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$ *tals que*

$$\widetilde{Y}(z,u) = \frac{ue^z\widetilde{Y}_0(z) + \widetilde{Y}_-(z)}{ue^z\widetilde{Y}_0(z)\widetilde{Y}_+(z) + 1}$$

és una solució formal de l'equació (1). Les sèries $\widetilde{Y}_-$, $\widetilde{Y}_+$, $\widetilde{Y}_0 - 1$, *són funcions ressurgents simples. Les seves transformades de Borel tenen creixement exponencial i les seves singularitats estan ubicades a* $\mathbb{Z}$.

Demostració: Observem que si Y és solució de l'equació (1) aleshores $1/Y$ verifica

$$-\frac{d}{dz}(1/Y) = 1/Y + H^+(z) + H^-(z)(1/Y)^2 . \tag{12}$$

Per tant, usant els mateixos arguments que en la proposició 9, podem provar que existeix una única sèrie formal $\widetilde{Y}_+ \in z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$ tal que la seva inversa és solució de (1), i és una funció ressurgent simple tal que la seva transformada de Borel té les singularitats en els enters positius i té creixement exponencial.

Fent ara el canvi $Y = \frac{a+\widetilde{Y}_-(z)}{a\widetilde{Y}_+(z)+1}$, tenim que $a(z)$ verifica l'equació $da/dz = a(1 + H^+\widetilde{Y}_- + H^-\widetilde{Y}_+)$: la solució general és $\tilde{a} = ue^{z+\tilde{\alpha}(z)}$, on $\tilde{\alpha}$ és la única sèrie formal sense terme constant amb derivada $H^+\widetilde{Y}_- + H^-\widetilde{Y}_+$. La sèrie $\tilde{\alpha}$ és una funció ressurgent, ja que la seva transformada de Borel $\hat{\alpha}(\zeta) = -\frac{1}{\zeta}(\hat{H}^+ * \hat{Y}_- + \hat{H}^- * \hat{Y}_+)$ té singularitats sobre $\mathbb{Z}^*$ i té creixement exponencial. La seva exponencial $\widetilde{Y}_0 = e^{\tilde{\alpha}}$ també conserva aquestes propietats per les propietats generals de l'exponenciació de funcions ressurgents ([4, 3]: $\widetilde{Y}_0$ té terme constant 1 i el seu menor $\hat{Y}_0(\zeta) = \sum_{n\geq 1}\hat{\alpha}^{*n}/n!$ és analític en el recobriment universal de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, i no té singularitats en l'origen dins la fulla principal). $\square$

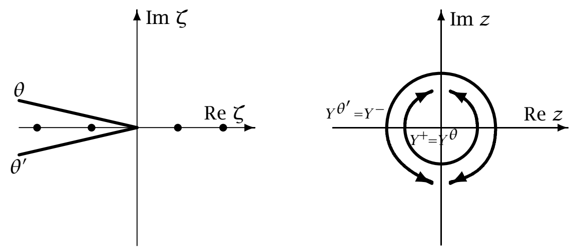
La proposició anterior ens dóna la integral formal en forma tancada, però usa fortament el fet que la nostra equació és de Riccati. La forma general d'aquesta solució és immediata $\widetilde{Y}(z,u) = \sum_{n\geq 0} u^n e^{nz}\tilde{\phi}_n(z)$ amb $\tilde{\phi}_0 = \widetilde{Y}_-$, i per a n positius, $\tilde{\phi}_n = (-1)^{n-1}\widetilde{Y}_0^n\widetilde{Y}_+^{n-1}(1 - \widetilde{Y}_-\widetilde{Y}_+)$.

Si calculem la resumada de $\widetilde{Y}(z,u)$ en una direcció θ no singular, obtenim una família uniparamètrica de solucions de (1):

$$Y^\theta(z,u) = \sum_{n\geq 0} u^n e^{nz}\mathcal{L}^\theta\hat{\phi}_n = \frac{ue^zY_0^\theta(z) + Y_-^\theta(z)}{ue^zY_0^\theta(z)Y_+^\theta(z) + 1} ,$$

definida per Re $(ze^{i\theta}) - \tau >$ const$|ue^z|$ (una condició imposada per assegurar que les transformades de Laplace de $\hat{Y}_0$, $\hat{Y}_-$, $\hat{Y}_+$ estan definides i que el denominador en $Y^\theta(z,u)$ no s'anul·li).

Movent la direcció d'integració θ en el semiplà superior o inferior obtenim la continuació analítica de $Y^\theta(z,u)$ per als z en un entorn sectorial d'infinit d'obertura 2π, que anomenem $Y^+(z,u)$ o $Y^-(z,u)$ com indica la figura:



Per tant, tenim essencialment dues famílies uniparamètriques de solucions de l'equació (1), caracteritzades pel seu comportament en els dominis respectius, que han d'estar connectades: un membre $Y^+(.,u)$ de la primera família ha de coincidir amb algun membre $Y^-(.,u')$ de la segona per als valors de z amb part real negativa, i amb algun altre $Y^-(.,u'')$ per als valors de z amb part real positiva. Aquestes fórmules de connexió seran calculades en les seccions següents. Fixem-nos que nosaltres estem particularment interessats en el cas de les funcions $Y^+(z,0) = Y^+(z)$ i $Y^-(z,0) = Y^-(z)$. De fet, amb el que tenim fins ara, ja hem provat els dos primers punts del teorema 7; la unicitat serà una conseqüència immediata del lema següent:

12 Lema *Si* $u \in \mathbb{C}^*$, $Y^-(z,u)$ *està definida per* $\operatorname{Re} z \le 0$ *i* $|z|$ *prou gran, i verifica*

$$Y^-(z,u) - Y^-(z,0) = ue^z(1 + O(z^{-1}))\,.$$

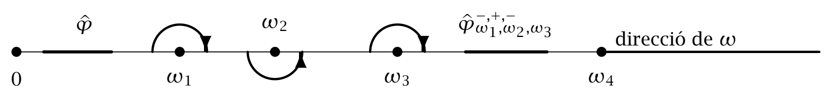
De fet, qualsevol solució de l'equació (1) analítica en un entorn de $i \cdot \infty$ en l'eix imaginari ha de coincidir amb alguna funció $Y^-(z,u)$; només una tendeix a 0 quan $\operatorname{Im} z$ tendeix a infinit, i és la que correspon a $u = 0$.

I ara, per obtenir l'últim punt del teorema, només hem de calcular el valor u_0 del paràmetre tal que $Y^+(z) = Y^+(z,0) = Y^-(z,u_0)$ per a $\operatorname{Re} z < 0$ i aplicar el lema 12.

5.4 Càlcul diferencial estranger

En aquesta secció analitzarem les singularitats en el model convolutiu i relacionarem el comportament del menor $\widehat{Y}$ prop de les seves singularitats amb el valor de u_0 que apareix en el lema 12. L'anàlisi d'aquestes singularitats la farem usant el *càlcul estranger*, una de les eines més importants en la teoria de la ressurgència d'Ecalle. La idea és introduir en l'espai de funcions ressurgents uns operadors que es comporten com una derivació: *les derivades estrangeres*. Anem a introduir-les en el cas de funcions ressurgents simples.

Sigui $\omega \in \mathbb{C}^*$. Definim l'operador Δ_ω de la manera següent: a partir d'una funció ressurgent simple $\tilde{\varphi}(z)$, seguim la continuació analítica del seu menor $\hat{\varphi}(\zeta)$ al llarg de la semirecta que uneix l'origen amb ω; en aquesta semirecta, hi poden haver un conjunt ordenat de singularitats $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r)$ que s'han d'encerclar. Si $r \ge 1$, obtindrem 2^{r-1} determinacions diferents del menor en el segment $]\omega_{r-1}, \omega_r[$ segons voltem cada singularitat per la dreta o l'esquerra (amb la convenció que $\omega_0 = 0$ si $r = 1$ i en aquest cas només hi ha una determinació), i les denotem per $\hat{\varphi}^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_{r-1}}_{\omega_1,\dots,\omega_{r-1}}$. Cada ϵ_i és un més o un menys segons que voltem ω_i per la dreta o l'esquerra:



- Si $\omega \notin \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, definim $\Delta_\omega \tilde{\varphi} = 0$.
- Si $\omega = \omega_r$ per a $r \geq 1$, cada una de les determinacions pot tenir una singularitat a ω:

$$\hat{\varphi}^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_{r-1}}_{\omega_1,\dots,\omega_{r-1}}(\omega + \zeta) = \frac{c^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_{r-1}}_{\omega_1,\dots,\omega_{r-1}}}{2\pi i \zeta} + \hat{\psi}^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_{r-1}}_{\omega_1,\dots,\omega_{r-1}}(\zeta)\frac{\log \zeta}{2\pi i} + \text{ funció regular,}$$

i definim

$$\Delta_{\omega_r} \tilde{\varphi} = \sum_{\epsilon_1,\dots,\epsilon_{r-1}} \frac{p(\epsilon)!q(\epsilon)!}{r!} \left(c^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_{r-1}}_{\omega_1,\dots,\omega_{r-1}} + \mathcal{B}^{-1} \hat{\psi}^{\epsilon_1,\dots,\epsilon_{r-1}}_{\omega_1,\dots,\omega_{r-1}}\right), \tag{13}$$

on els enters p i $q = r - 1 - p$ denoten el nombre de signes positius i negatius en la successió $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{r-1})$.

Hom pot verificar de manera senzilla la consistència d'aquesta definició. Podem entendre l'operador $\Delta_\omega \tilde{\varphi}$ com una mitjana ponderada de totes les determinacions del menor a prop de ω; afegir o eliminar falses singularitats a la llista $(\omega_1, \omega_2, \dots)$ no afectarà el resultat, que torna a ser una funció ressurgent (observem que $\Delta_\omega \tilde{\varphi}$ és una sèrie formal).

El lector interessat a conèixer com definir els operadors Δ_ω per a funcions ressurgents generals pot consultar [4], [3], [5] i [6]. Aquests operadors codifiquen tot el comportament singular del menor.

Hi ha una propietat d'aquests operadors que els fa importants per a nosaltres: Δ_ω són derivacions dins l'àlgebra de funcions ressurgents simples, és a dir, si $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ són funcions ressurgents simples, i $\omega \in \mathbb{C}^*$, aleshores $\Delta_\omega(\tilde{\varphi}_1 \tilde{\varphi}_2) = (\Delta_\omega \tilde{\varphi}_1)\tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_1(\Delta_\omega \tilde{\varphi}_2)$.

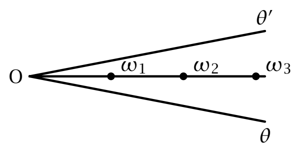
Per diferenciar-les de la derivació usual $\frac{d}{dz}$, Ecalle les anomena *derivacions estrangeres* i ambdues derivacions interaccionen segons la regla següent:

$$\frac{d}{dz}\Delta_\omega \tilde{\varphi} = \Delta_\omega \frac{d\tilde{\varphi}}{dz} + \omega \Delta_\omega \tilde{\varphi}\,.$$

Per tant, si introduïm l'operador *derivació estrangera puntejada* $\dot{\Delta}_\omega = e^{-\omega z}\Delta_\omega$, tenim que $\dot{\Delta}_\omega$ commuta amb la derivació usual

$$\frac{d}{dz}\dot{\Delta}_\omega \tilde{\varphi} = \dot{\Delta}_\omega \frac{d\tilde{\varphi}}{dz}\,. \tag{14}$$

Per acabar, donem la propietat essencial per al nostre càlcul (vegeu [3]): suposem que totes les singularitats del menor de $\tilde{\varphi}$ en un sector $\{\theta < \arg\zeta < \theta'\}$ formen una successió ordenada (com és el nostre cas) $(\omega_1, \omega_2, \ldots)$ en una semirecta dins el sector



i supossem també que podem aplicar el procés de resumació de Borel. Aleshores

$$\varphi^\theta = \varphi^{\theta'} + \sum_{r\geq 1;\, i_1,\ldots,i_r\geq 1} \frac{1}{r!} e^{-(\omega_{i_1}+\cdots+\omega_{i_r})z} (\Delta_{\omega_{i_1}} \cdots \Delta_{\omega_{i_r}} \tilde{\varphi})^{\theta'} = [(\exp \sum_{i\geq 1} \dot{\Delta}_{\omega_i}).\tilde{\varphi}]^{\theta'}. \tag{15}$$

Així, el coneixement de les derivades estrangeres ens dóna totes les possibles resumacions de la funció ressurgent $\tilde{\varphi}$.

5.5 Equació pont

En aquesta secció acabarem la prova del teorema 7. Per això, calcularem les derivades estrangeres de la funció ressurgent $\tilde{Y}_-(z) = \tilde{Y}(z,0)$. De fet, com veurem a continuació, serà més fàcil calcular les derivades estrangeres de «tota» la integral $\tilde{Y}(z,u)$.

Escrivim la integral formal en la seva forma de sèrie

$$\tilde{Y}(z,u) = \sum_{n\geq 0} u^n e^{nz} \tilde{\phi}_n(z),$$

i prenem un valor de $\omega \in \mathbb{Z}^*$, ja que per a qualsevol altre valor ja sabem que $\Delta_\omega \tilde{Y} = 0$ perquè el corresponent menor no té cap més singularitat. El que farem és usar l'operador derivada puntejada perquè, com hem vist anteriorment, aquest commuta amb la derivació usual.

L'aplicació d'aquest operador a la integral general dóna

$$\dot{\Delta}_\omega \tilde{Y}(z,u) = e^{-\omega z} \Delta_\omega \tilde{Y}(z,u) = \sum_{n\geq 0} u^n e^{(n-\omega)z} \Delta_\omega \tilde{\phi}_n(z),$$

però és millor aplicar-lo a l'equació (1). Usant que la derivada puntejada commuta amb la derivació usual tenim que $\dot{\Delta}_\omega \tilde{Y}$ verifica l'equació lineal

$$\frac{d}{dz}(\dot{\Delta}_\omega \tilde{Y}) = (1 + 2H^+\tilde{Y})\dot{\Delta}_\omega \tilde{Y}.$$

Observem que $\dot{\Delta}_\omega H^\pm$ és zero perquè $\hat{H}^\pm$ són funcions enteres i a més tant la derivada com la derivada puntejada són derivacions i, per tant, verifiquen la regla de Leibniz.

Usant aquesta equació provarem la proposició següent:

13 PROPOSICIÓ *Existeixen dos nombres $A^-, A^+ \in \mathbb{C}$ tals que*

$$\begin{aligned}\dot{\Delta}_{-1}\widetilde{Y} &= A^-\partial\frac{\widetilde{Y}}{\partial u}\\ \dot{\Delta}_{+1}\widetilde{Y} &= -A^+u^2\partial\frac{\widetilde{Y}}{\partial u}\\ \dot{\Delta}_{\omega}\widetilde{Y} &= 0 \quad si \quad \omega \notin \{-1,+1\}.\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓ: L'equació lineal verificada per $\dot{\Delta}_\omega\widetilde{Y}(z,u)$ no és altra que l'equació variacional de $\widetilde{Y}(z,u)$ i, per tant, $\partial\widetilde{Y}/\partial u$ també n'és una solució. Així doncs, ambdues solucions han de ser proporcionals

$$\dot{\Delta}_\omega\widetilde{Y} = A_\omega(u)\frac{\partial\widetilde{Y}}{\partial u}.$$

Desenvolupant ambdós costats d'aquesta igualtat en sèrie de potències de u i de e^z hom pot veure que el coeficient de e^z en $\partial\widetilde{Y}/\partial u$ és $\widetilde{\phi}_1 \neq 0$. D'altra banda, com $\dot{\Delta}_\omega\widetilde{Y} = e^{-\omega z}\Delta_\omega\widetilde{Y}$ aquesta sèrie «comença» per la potència $e^{-\omega z}\Delta_\omega\widetilde{\phi}_0$.

Per tant, el coeficient $A_\omega(u)$ ha de ser zero si $\omega \leq -2$. Més encara, la homogeneïtat respecte de u dóna que $A_\omega(u) = A_\omega u^{\omega+1}$.

Si usem els mateixos arguments per a l'equació (12) obtenim que A_ω és zero si $\omega \geq 2$. Només en aquest últim punt usem fortament que l'equació que tractem és de Riccati i no una equació no lineal de primer ordre més general. □

Fixem-nos que hem obtingut una relació entre les derivades estrangeres, que estan lligades a les singularitats de $\widehat{Y}$, amb la derivada usual de l'objecte purament formal que és $\widetilde{Y}(z,u)$. Aquestes relacions varen ser anomenades per Ecalle *equacions pont*, ja que són un «pont» entre el càlcul estranger i el càlcul ordinari. Quan s'interpreta aquesta equació en el model convolutiu, ens diu que hi ha una relació molt forta entre el germ analític a l'origen (la sèrie $\widetilde{Y}(z,u)$) i les singularitats de la seva continuació analítica. En alguns casos el germ es reprodueix ell mateix en els punts singulars, aquesta és la raó del nom «ressurgent». Evidentment, amb la nostra definició de funció ressurgent, això no ha de passar, però Ecalle va notar que això és bastant usual quan les funcions ressurgents apareixen en problemes «naturals» com a solucions d'equacions funcionals analítiques.

La diferència amb el cas general d'equacions nolineals és que l'equació pont esdevé un conjunt infinit de relacions i els nombres A_ω, $\omega \in \{-1,1,2,\ldots\}$, s'anomenen *invariants analítics de l'equació*, ja que hom pot provar que dues equacions són analíticament conjugades (no només formalment) si i només si tenen el mateix conjunt de A_ω's.

Les derivades estrangeres de tots els coeficients de la sèrie $\widetilde{\phi}_n$ poden ser calculades a partir de les equacions pont, i s'obté

$$\begin{aligned}&\Delta_{-1}\widetilde{\phi}_n = A^-\widetilde{\phi}_{n+1}\\ &\Delta_{+1}\widetilde{\phi}_n = -A^+\widetilde{\phi}_{n-1},\ n \geq 1,\ \Delta_{+1}\widetilde{\phi}_0 = 0\,.\end{aligned}$$

En particular, tenint en compte que $\tilde{\phi}_0 = \tilde{Y}_-$ i $\tilde{\phi}_n = (-1)^n \tilde{Y}_0^n \tilde{Y}_+^n (1 - \tilde{Y}_- \tilde{Y}_+)$, obtenim $\Delta_{-1}\tilde{Y}_- = A^- \tilde{Y}_0 (1 - \tilde{Y}_- \tilde{Y}_+) = A^- + O(z^{-1})$. Això ens diu que A^- és el residu de $\hat{Y}_-(\zeta)$ en el punt -1. Un anàlisi similar dóna que A^+ és el residu de $\hat{Y}_+(\zeta)$ en el punt $+1$. Aquests dos nombres són funcions transcendents de les funcions de partida H^+ i H^- i no es poden calcular en general (vegeu [7] per a un mètode numèric per calcular-los i [2] per al seu càlcul analític en el cas $H^\pm = \dfrac{-B^\pm}{2\pi i z}$). És important dir que el fet que les derivades estrangeres en els altres enters siguin zero no significa que no hi hagi singularitats en aquests punts. Aquestes singularitats es detecten iterant l'equació pont.

Per acabar, ara ja podem comparar les dues famílies de solucions $Y^-(z,u)$ i $Y^+(z,u)$ de l'equació (1). Recordem que aquestes famílies varen ser obtingudes pel mètode de resumació de Borel en la secció 5.3. Prenem a partir d'ara la variable z amb mòdul prou gran, i els valors apropiats de u per tal que $Y^\pm(z,u)$ estiguin definides.

Si Re $z < 0$, podem aplicar la fórmula (15) prenent dos angles $\theta < \pi < \theta'$ propers a π):

$$Y^\theta(z,u) = [\exp \dot{\Delta}{-1}\tilde{Y}]^{\theta'}(z,u) = [\exp(A^- \frac{\partial}{\partial u})\tilde{Y}]^{\theta'}(z,u) = Y^{\theta'}(z, u + A^-)\,,$$

això significa que:

$$Y^+(z,u) = Y^-(z, u + A^-)\,; \tag{16}$$

i de la mateixa manera, per a Re $z > 0$, triant $\theta < 0 < \theta'$,

$$Y^-(z,u) = Y^+(z, \frac{u}{1 + A^+ u})\,. \tag{17}$$

Prenem ara $u = 0$: ja sabíem que $Y^+(z) = Y^+(z,0)$ i $Y^-(z) = Y^-(z,0)$ coincidien per a Re $z > 0$ (recordem que $\hat{Y}_-(\zeta)$ no té singularitats a $\mathbb{R}^+$), però ara, la fórmula (16) i el lema 12 mostren que, per a Re $z < 0$,

$$Y^+(z) - Y^-(z) = Y^+(z,0) - Y^-(z,0) = Y^-(z,A^-) - Y^-(z,0) = A^- e^z (1 + O(z^{-1}))\,,$$

i això acaba la prova del teorema 7.

Referències

[1] Balser, W. *From Divergent Power Series to Analytic Functions.* (Lecture Notes in Mathematics, 1592) Springer-Verlag, 1994.

[2] Bonet, C.; Sauzin, D.; Seara, T. M.; València, M. «Adiabatic invariant of the harmonic oscillator, complex matching and resurgence». *SIAM Journal on Math. Analysis* 29 6 (1998), 1335–1360.

[3] Candelpergher, B.; Nosmas, J.-C; Pham, F. *Approche de la résurgence.* París: Actualités Math. Hermann, 1993.

[4] Écalle, J. «Les fonctions résurgentes». *Prépub. Math. Université Paris-Sud* [Orsay], 3 v. 1981, 1981, 1985.

[5] Écalle, J. «Cinq applications des fonctions résurgentes». *Prépub. Math. Université Paris-Sud* [Orsay], 1984.

[6] Écalle, J. «Six Lectures on Transseries, Analysable Functions and the Constructive Proof of Dulac's Conjecture». D. Schlomiuk [ed.], *Bifurcations and Periodic Orbits of Vector Fields*. Kluwer Academic Publishers, 1993 75–184.

[7] Kruskal, M.; Segur, H. «Asymptotics beyond all orders in a model of crystal growth». *Stud. Appl. Math.*, 85 (1991), 129–180.

[8] Martinet, J.; Ramis, J.-P. «Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonantes du premier ordre». *Ann. Sc. ENS*, 16, 4 (1983), 571–621.

[9] Olivé, C.; Seara, T. M. «Matching complejo y resurgencia en el problema de la escisión de separatrices». *Actas CEDYA 99*, 1999, 419–426.

[10] Olivé, C.; Sauzin, D.; Seara, T. M. *Resurgence in a Hamilton-Jacobi Equation*. Apareixerà a *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble.

[11] Olivé, C.; Sauzin, D.; Seara, T. M. *Two Examples of Resurgence*. Apareixerà a *Contemporary Mathematics*.

[12] Poincaré, H. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Vol. 2. París: Gauthier-Villars, 1893.

[13] Sauzin, D. «Résurgence parametrique et exponentielle petitesse de l'écart des separatrices du pendule rapidement forcé». *Ann. Inst. Fourier* [Grenoble] 45, 2 (1995), 453–511.

T. M. Seara
Departament de Matemàtica Aplicada I
Universitat Politècnica de Catalunya
Tere.M-Seara@ma1.upc.es

D. Sauzin
Astronomie et Systèmes Dynamiques
CNRS
David.Sauzin@imcce.fr