



GRADO SEIS DE SEPARACIÓN

Javier Ozón Górriz

Departamento de Matemática Aplicada IV

Universitat Politècnica de Catalunya

ozzy@mat.upc.es

Abstract: El 4 de junio de 1998 aparecía en la revista *Nature* un breve artículo, firmado por Duncan J. Watts y Steve Strogatz, en donde se describían por vez primera las llamadas *redes pequeño-mundo*, *small-world networks* en el original, de amplias repercusiones tanto en el campo de las ingenierías telemática e informática como en otras áreas de las ciencias sociales y de la naturaleza. El estudio de estas redes ha permitido, entre otros logros, esclarecer la dinámica de propagación de virus (lo mismo biológicos que virtuales) así como el encogimiento que parece sufrir el planeta en materia de vínculos, o la posibilidad de reducir el diámetro de las grandes redes telemáticas sin apenas intervenciones.

BREVE BIOGRAFÍA DEL PAÑUELO

Existe el dicho, de todos conocido, de que el mundo es un pañuelo. Si el epigrama les resulta exagerado pueden adquirir la novela de David Lodge *El mundo es un pañuelo* y asistir al fascinante espectáculo de la contractura del planeta. Si, aun así, el libro no les parece suficiente les aconsejo entonces que, venciendo su timidez, entablen conversación con un extraño e indaguen el círculo de sus amistades. No es infrecuente comprobar en estos lances que compartimos, cuando menos, uno de sus amigos, no digamos ya si se trata de tener en común un conocido o el conocido de un conocido: dos personas, por ejemplo, empleadas en el mismo despacho. Los esquemas, como veremos, se multiplican, siendo otro caso sonado de encogimiento planetario la propagación de virus informáticos a través de la red, capaz de abarcar la superficie entera del planeta en cuestión de minutos.

Es probable que algunos de ustedes hayan tenido oportunidad de ver *Six degrees of separation*, un film de Fred Schepisi basado en la pieza teatral homónima de John Guare. El film narra la peripecia de un joven (Will Smith) que irrumpe en casa de un matrimonio pudiente (Donald Sutherland y Stockard Channing) con una herida de arma blanca en el vientre, pidiendo auxilio y declarándose hijo del actor Sidney Poitier, además de íntimo amigo de los hijos del matrimonio. A la mañana siguiente el matrimonio descubre que el joven es un impostor que, no obstante, ha tenido acceso a detalles de su intimidad. Después de cursar la

correspondiente denuncia la pareja pone rumbo a Harvard con objeto de recabar el testimonio de sus hijos estudiantes y establecer el origen del engaño dado que, como dice la madre en el curso del filme, todos estamos vinculados a todos mediante una cadena de, a lo sumo, seis personalidades. Son los *seis grados de separación* que dan título a la película y que abarcan la totalidad del género humano: con media docena de eslabones es posible establecer comunicación con el Papa de Roma, el presidente de la República Armenia o un aborigen plantado en la inmensidad de Australia.

Ahora bien, ¿por qué seis grados de separación y no cinco o una docena? Es una cuestión de medida. El año 1967 Stanley Milgram, a la sazón sociólogo en Harvard, llevó a la práctica un sencillo experimento. Milgram solicitó a una serie de residentes en los estados de Kansas y Nebraska, al oeste de las grandes llanuras de los Estados Unidos de América, que intentaran establecer contacto, a través del correo postal, con un grupo de ciudadanos afincados en Boston, en el extremo noreste del país. Cada persona debía remitir una carta a un conocido que guardara, en su opinión, posibilidades de conocer al destinatario bostoniano o en su defecto a alguien que tuviera noticia suya, y así sucesivamente.

La experiencia arrojó un promedio de cinco intermedios antes de alcanzar el destino final de Boston, lo que quiere decir una distancia igual a seis. Posteriormente, Milgram reanudó el experimento con una ligera modificación. En este caso el destinatario y el emisor fueron escogidos entre miembros de distintas comunidades raciales, con la intuición de que el trayecto había de alargarse. Así no obstante, la distancia media fue otra vez igual a seis, dando pie a la hipótesis de los seis grados de separación o, si se prefiere, *seis encajadas de manos* entre dos individuos cualesquiera del planeta.

EL JUEGO DE HOLLYWOOD

Es común, en el universo del cine, el llamado juego de Bacon. El pasatiempos estriba en determinar la distancia de cualquier actor a Kevin Bacon. Un actor tiene distancia Bacon 1 si ha participado en una película, cuando menos, en la que interviene Kevin Bacon, distancia 2 si ha compartido cartel con un actor a distancia Bacon 1, y así sucesivamente. La distancia de Charles Chaplin a Kevin Bacon es de este modo tres, con Marlon Brando y Laurence Fishburne en el papel de eslabones. Ni que decir tiene que puede definirse la distancia entre dos actores cualesquiera, Tom Cruise y Lola



Gaos, por ejemplo, que es igual a cuatro, vía Emmanuelle Béart, Michel Piccoli y Paco Rabal; la serie de películas es en este caso: *Misión imposible*, *La belle noiseuse*, *Belle de jour* y *Viridiana*. Se sospecha que ningún actor, siempre y cuando haya participado en un film comercial, tiene distancia Bacon mayor a 6.

De otro lado, la comunidad matemática goza también de un singular epicentro: el matemático húngaro Paul Erdős, muerto en 1996 mientras asistía a un congreso. La producción de este genio es tan enorme, computada en número de publicaciones, que hace tiempo que se habla en la literatura de la llamada distancia Erdős: un matemático tiene distancia Erdős 1 si ha firmado un artículo en colaboración con él, distancia 2 si ha publicado con un matemático a distancia Erdős 1 y así consecutivamente. Existe la creencia de que ningún matemático del mundo, siempre y cuando haya publicado un artículo conjuntamente a otro firmante, está desvinculado de Erdős. Se ha conjeturado, incluso, que todo científico y estudioso, sin que haya de ser matemático, tiene distancia Erdős finita. Por ejemplo, la distancia de Erdős a Einstein es 2 gracias al matemático alemán Ernst G. Straus; 4 a Noam Chomsky, famoso lingüista y profesor en el MIT; 3 a Jean Piaget, psicólogo y pedagogo; y 5 al filósofo Karl Popper. Dan Kleitman ostenta la proeza de tener un número combinado Erdős-Bacon igual a 3, por cuanto no sólo firmó siete artículos en colaboración con Erdős, sino que aparece en el film *Good Will Hunting* al lado de Minnie Driver, quien por otra parte comparte cartel con Bacon en *Sleepers*.

EL MODELO NUMÉRICO: REDES PEQUEÑO-MUNDO

Lo que estas redes, llamadas *pequeño-mundo*, tienen en común, y lo mismo otras -por ejemplo: el esquema neuronal del gusano *Caenorhabditis elegans*, el mapa de propagación de epidemias de un área geográfica o la red de suministro de una compañía eléctrica-, puede ser descrito en términos de la teoría de grafos. Un grafo es una estructura de elementos relacionados de forma binaria, es decir, un conjunto de *nodos* o puntos dispuestos en el plano, conectados por líneas llamadas *aristas*. Cualquiera de las redes descritas anteriormente puede ser representada por un grafo simple. Así, en el llamado *grafo de colaboración*, Erdős los nodos designan matemáticos y las aristas colaboraciones. Dos nodos son adyacentes, es decir, permanecen unidos por una arista, si y sólo si representan matemáticos que han firmado un artículo en colaboración. Igualmente, puede esbozarse un grafo descriptivo de la sociedad de actores, designando las aristas intervenciones en un mismo filme.

En un artículo ya clásico, publicado en *Nature* el 4 de junio de 1998, Duncan J. Watts y Steve Strogatz ponían de manifiesto lo que las redes pequeño-mundo tienen en común, a saber, un diámetro pequeño combinado con un grado alto de agregación. Es decir, las redes pequeño-mundo son redes en las cuales la distancia máxima entre dos nodos -lo que se llama *diámetro*- es relativamente pequeña, pero cuyo grado de agregación es alto: de esta manera, dado un nodo determinado, un porcentaje alto de sus vecinos son a su vez vecinos entre sí. Ahora bien, ¿cómo construir una red de esta

naturaleza? O dicho de otro modo, ¿cómo determinar si una red obedece a la pauta de pequeño mundo?

Watts y Strogatz partieron en su ensayo de redes regulares, como las que se ilustran en la figura, a las cuales fueron aplicando, de forma sucesiva, alteraciones hasta convertirlas en redes aleatorias. Una red regular es una red tal que todos sus nodos tienen el mismo número de aristas. En el caso que nos ocupa, Watts y Strogatz propusieron además una familia con un grado alto de simetría. Distribuyeron los nodos sobre un círculo y los unieron con los nodos más próximos tanto por la derecha como por la izquierda: en la figura, dos en cada sentido, aunque esta cantidad puede variar. Estos grafos, como se demuestra fácilmente, tienen un alto grado de agregación y un diámetro elevado. En el citado artículo, Watts y Strogatz partieron de grafos pertenecientes a esta familia para, a continuación, modificarlos de forma aleatoria. Así, para una variable p determinada, Watts y Strogatz escogían cada arista del grafo regular original con probabilidad p y la trasladaban hacia otra zona del grafo, designada al azar, obteniéndose para cada probabilidad familias con propiedades diferentes: cuanto mayor es p más alto el porcentaje de aristas modificadas y más pequeños el diámetro y grado de agregación finales. Tal y como habían conjeturado Watts y Strogatz, las redes pequeño mundo -es decir, redes con un diámetro pequeño y un apiñamiento alto- ocuparon un lugar en medio del espectro entre las redes regulares, que presentan mucho apiñamiento y un diámetro alto, y las redes aleatorias, que contrariamente tienen un grado de agregación y un diámetro reducidos. Es de este modo que pueden definirse, a partir de redes regulares y sin llegar a formar modelos completamente aleatorios, grafos con un diámetro pequeño y un grado de agregación elevado, es decir, redes pequeño-mundo. En estos casos, por lo demás, es imposible determinar localmente -desde uno de los puntos de la red, sin acceder al resto- la transición de red regular a red pequeño-mundo, dada su relación con la estructura global del grafo.

Por otra parte, todo el laborioso proceso de redistribución de las aristas puede llevarse a cabo de forma determinista, desviando las conexiones de unos puntos a otros del grafo no de forma aleatoria, como hacen Watts y Strogatz, sino con objeto de minimizar el diámetro. Se han definido así las redes pequeño-mundo deterministas, que presentan las mismas características que las redes de Watts y Strogatz, pero acentuadas. De este modo, es posible describir una red de cuatro millones de nodos, o habitantes, tal que el diámetro inicial de 1000 pueda reducirse hasta 10 reconectando solamente 250 nodos, es decir, haciendo, por ejemplo, que un personaje de la población se entrevistase con 249 interlocutores. Los efectos de este fenómeno pueden ser devastadores si se piensa en un modelo de propagación de epidemias: poniendo en contacto sólo 250 personas de un total de cuatro millones podría reducirse la distancia máxima entre dos individuos de 1000 a 10. Esto es, cualquier persona estaría finalmente a una distancia de diez contactos, a lo sumo, con un foco de contagio, siendo inicialmente esa diferencia igual a mil.

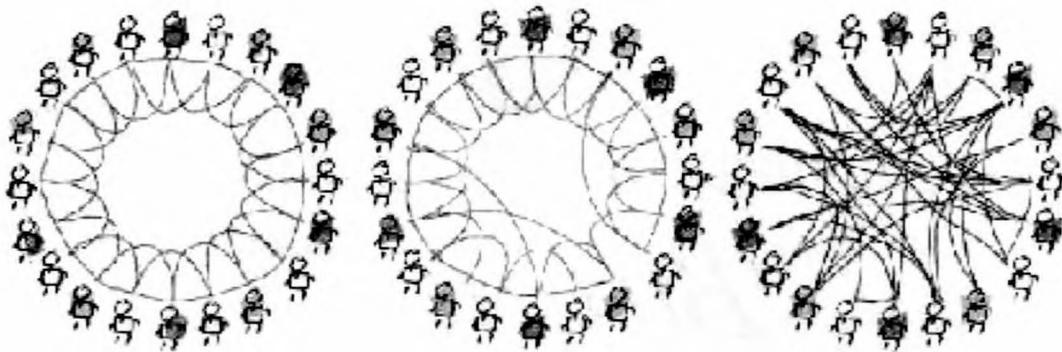


Fig. 1. La primera figura muestra una red regular con un grado de agregación elevado (vecinos de un nodo determinado están conectados entre ellos) y diámetro alto. La tercera figura (red aleatoria), contrariamente, tiene agregación baja y un diámetro pequeño. Entre estos extremos aparecen las redes pequeño-mundo, con una agregación elevada y un diámetro pequeño.

EL MUNDO ES UN PAÑUELO

El mundo, ciertamente, es una red de este tipo. Esto es, puede ser representado por un grafo con pautas de regularidad. Así, para un individuo dado puede aproximarse, dentro de su círculo de amistades, un dominio de cien personas. Si cada uno de estos individuos conoce de su lado a cien personas y volvemos a multiplicar por 100 tendremos, después de una cadena de seis capítulos, un número de personas igual a 100 elevado a 6, es decir, un billón, suficiente para abarcar la superficie entera del planeta. La realidad, no obstante, es distinta: de las cien personas que un individuo puede declarar son muchos los que previamente puede incluir la lista -los amigos de nuestros amigos suelen ser nuestros amigos, o cuando menos caer en el círculo de nuestros allegados-, de tal manera que la cadena no se multiplica cada vez por cien sino por un factor más pequeño.

Por otro lado, el círculo puede encerrar saltos a zonas remotas -nexos similares a las aristas aleatorias de Watts y Strogatz- en el sentido de amistades poco frecuentes capaces de reunir, por ejemplo, al amo de una quinta del sur de Buenos Aires con un payés de la Garrotxa o el guarda de la sala Bordone del Kunsthistorisches Museum, en Viena. Es sabido que la red de actores tiene diámetro pequeño merced a la incidencia de aristas de este tipo, es decir, de parejas poco habituales que determinan enlaces entre áreas del grafo en un principio remotas, como es el caso de Emmanuelle Béart y Tom Cruise, coprotagonistas de *Misión Imposible*, o el del veterano actor Eddie Albert, que ha participado en más de ochenta películas a lo largo de sesenta años, permitiendo establecer enlaces entre estrellas como Bogart, Brando, Richard Burton, John Travolta y el mismo Kevin Bacon.

En su artículo original, Watts y Strogatz analizaron además otras topologías de red, como la distribución eléctrica de la zona oeste de los Estados Unidos y el esquema neuronal del gusano *Caenorhabditis elegans*, que compararon con la red de actores y con su modelo probabilístico, obteniendo las mismas pautas. Posteriormente, un equipo de la Universidad de Notre Dame de Indiana, encabezado por Albert-Lászlo Barabási, ha llevado a cabo medidas y estadísticas sobre la celeberrima world-wide web, es decir

Internet, habiendo encontrado el mismo esquema. Lo único que se precisa, en resumidas cuentas, para dar pie a una red pequeño-mundo es una ligera proporción de conexiones entre zonas alejadas del espacio.

INTERESES Y ALCANCE

El interés del efecto pequeño-mundo viene así determinado por el amplio espectro de su alcance. No sólo perfila las bases para un modelo de propagación de epidemias y la ciencia de la rumorología (desgraciadamente, es más sencillo contagiar una enfermedad en una red pequeño-mundo que en una red ordinaria, tal como sucedió en el año 1976 con el virus Ebola, propagado desde el Zaire y Sudán hasta la Gran Bretaña por mediación de un investigador afincado en el África central), sino que es susceptible de servir de modelo de redes telemáticas, la www, por ejemplo, o una red GSM o UMTS de telefonía móvil, a fin de recortar el diámetro con un número mínimo de intervenciones, o como pauta para comprender las ingentes construcciones neuronales del sistema nervioso animal y el modo en que las diferentes partes del neocórtex entran en resonancia para crear imágenes perceptivas y reacciones conscientes, empresa dirigida por Olaf Sporns en el Instituto de Neurociencia de San Diego. No sólo los matemáticos se distribuyen del mismo modo que los actores, sino que la red mundial o el sistema nervioso de un ser vivo presentan rasgos en común, instancia que Watts y Strogatz han puesto de manifiesto, con ayuda de su modelo matemático. Un modelo simplificador como todos los modelos, pero necesario a fin y efecto de esclarecer lo que sucede en el entresuelo. En este caso, que el mundo es un pañuelo y bastan seis grados de separación.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

- Albert R., Jeong H., Barabási A., Diameter of the World-Wide Web, *Nature*, vol. 401, 9 September 1999
- Comellas F., Ozón J., Peters J., Deterministic Small-World Communication Networks, *Information Processing Letters*. Aceptado Abril 2000.
- Watts D., Strogatz S., Collective dynamics of «small-world» networks, *Nature*, vol. 393, 4 June 1998
- Watts D., *Small Worlds*, Princeton University Press, New Jersey 1999

