Collect. Math. **38** (1987), 3–15

José Luis Rubio de Francia

(1949–1988)

El 6 de febrero de 1988 fallecía en Madrid José Luis Rubio de Francia. Era el exponente más alto de la consolidación de las Matemáticas españolas a nivel mundial. Estaba considerado como una de las figuras principales del Análisis de Fourier.

José Luis reunía todas las condiciones necesarias para triunfar en las Matemáticas, y algunas más: amplitud de conocimientos, profundidad, una rara habilidad para llevar al límite las ideas más sencillas, todo ello junto con un carácter optimista y abierto, que hacía de él un colaborador ideal. Tenía una capacidad inagotable para comunicar ideas. Tanto sus conferencias como sus escritos muestran un estilo personal marcado por la elegancia y la efectividad. Era un maestro en formular principios generales muy simples y luego medir su alcance con una cadena de ejemplos muy bien elegidos.

Las características más notables de la personalidad de José Luis eran su sencillez y su radical hombría de bien, que desembocaban en una “elegancia moral sin esfuerzo”. Nunca he conocido a nadie en que se dieran al mismo tiempo tal capacidad intelectual y tal modestia.

Todas estas condiciones hacían de él un líder natural, bien a su pesar, y explican el desarrollo en torno a su figura de un potente grupo de Análisis.

La mejor medicina para el enorme dolor que me produce la pérdida de José Luis, es volver a recordar sus Matemáticas. Lo haré no de forma exhaustiva, sino con algunas pinceladas que sirvan para situar su obra dentro del Análisis de Fourier actual.

José Luis Rubio de Francia nació en Miedes (Zaragoza). Estudió la Licenciatura de Matemáticas en la Universidad de Zaragoza y también en esa Universidad se doctoró con una tesis titulada “Integración en grupos clásicos y abstractos con aplicaciones al Análisis de Fourier” realizada bajo la dirección del Profesor Luis Vigil.

Como indica el contenido de su tesis y el de sus primeros trabajos [1], [2], la formación doctoral de José Luis y su primera línea de investigación estaban dentro del Análisis Armónico Abstracto y el Análisis Funcional. Los dos años que pasó en Princeton con una beca postdoctoral (1974–75 y 1975–76) marcaron un cambio decisivo en su carrera. A través de un curso graduado impartido por Elias Stein se interesó por el Análisis Armónico clásico y sus temas más duros: sumabilidad esférica de series de Fourier, multiplicadores de Bochner-Riesz, etc. Como muestra de la importancia que tuvo para él este período de formación, basta decir que en los años posteriores, siempre tenía a mano en su despacho el cuaderno con sus notas de aquel curso.

Desde un principio, José Luis Rubio se interesó por el Análisis de Fourier vectorial como instrumento para resolver problemas no necesariamente vectoriales. Un buen ejemplo es el trabajo [3]. En él se estudia la convergencia de las series de Fourier dobles. En concreto, para $f \in L^{r,p}(\mathbb{T}^2)$, es decir, para $f(x,y)$ tal que

$$\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}|f(x,y)|^r\,dx\right)^{p/r}dy\right)^{1/p}<\infty,$$

las sumas parciales

$$S_{n,m}f(x,y)=\sum_{|k|\le n}\sum_{|j|\le m}\hat{f}(k,j)\,\exp(k\,x+j\,y)$$

de la serie de Fourier de f verifican

$$\lim_{n,m\to\infty}\|S_{n,m}f(\cdot,y)-f(\cdot,y)\|_r=0$$

para casi todo y en $\mathbb{T}$, si es que $p>\max(1,r/2)$. Este es un resultado intermedio entre la convergencia en $L^{r,p}(\mathbb{T}^2)$, que es consecuencia del teorema de M. Riesz, y la convergencia en casi todo punto, que, como demostró Fefferman [45], no es cierta en general.

Este resultado es consecuencia de la desigualdad vectorial:

$$\left\|\left(\sum_k|S^*f_k|^r\right)^{1/r}\right\|_p\le C_{p,r}\left\|\left(\sum_k|f_k|^r\right)^{1/r}\right\|_p, \tag{1}$$

donde

$$S^*f(x)=\sup_n|S_nf(x)|$$

es el operador maximal de las sumas parciales para $f\in L^1(\mathbb{T})$. José Luis Rubio obtiene (1) en el trabajo [3] interpolando entre el caso $r=p$ que es el teorema de Carleson-Hunt, y el resultado $r=2$, $1<p<\infty$, que se sigue del teorema de Marcinkiewicz-Zygmund.

Hay que decir que (1) es válida para cualesquiera $1 < r, p < \infty$, y, por consiguiente, la limitación $p > \max(1, r/2)$ en el teorema es innecesaria. Pero esta mejora tendría que esperar hasta el trabajo [8] en que José Luis obtuvo (1) para $1 < r, p < \infty$, utilizando la teoría de los pesos A_p. Hunt y Young [49] habían demostrado que si $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$ entonces

$$\int_0^{2\pi} |S^* f|^p \, w \le C_p \int_0^{2\pi} |f|^p \, w.$$

Veamos cómo esta desigualdad implica (1) para $1 < r < p < \infty$

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\sum_k |S^* f_k|^r \right)^{1/r} \right\|_p^r &= \left(\int_0^{2\pi} \left(\sum_k |S^* f_k|^r \right)^{p/r} dx \right)^{r/p} \\
&= \int_0^{2\pi} \sum_k |S^* f_k|^r \, u(x) \, dx
\end{aligned}$$

para cierta $u \in L^{(p/r)'}(\mathbb{T})$ tal que $u \ge 0$ y $\|u\|_{(p/r)'} = 1$ donde $(p/r)'$ designa el exponente conjugado de p/r. Pero si en lugar de u ponemos

$$M_s(u) = (M(u^s))^{1/s}$$

donde M es el operador maximal de Hardy-Littlewood, tenemos ([41], [44]) $M_s(u) \in A_1 \subset A_r$, de modo que

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\sum_k |S^* f_k|^r \right)^{1/r} \right\|_p^r &\le \sum_k \int_0^{2\pi} |S^* f_k|^r \, M_s(u) \\
&\le C \int_0^{2\pi} \sum_k |f_k|^r \, M_s(u) \\
&\le C \left(\int_0^{2\pi} \left(\sum_k |f_k|^r \right)^{p/r} dx \right)^{r/p} \|M_s u\|_{(p/r)'} \\
&\le C \left\| \left(\sum_k |f_k|^r \right)^{1/r} \right\|_p^r
\end{aligned}$$

pues M_s es acotado en $L^{(p/r)'}$ si tomamos $s < (p/r)'$. El caso $1 < p < r < \infty$ es tratado por un procedimiento de dualidad.

Los trabajos [1], [5], [6] y [17] están dedicados al problema general de encontrar condiciones para que la extensión vectorial de un determinado operador sea acotada en norma L^p.

Ya hemos visto con un ejemplo cómo pueden utilizarse las desigualdades con peso para obtener desigualdades vectoriales. Uno de los éxitos notables de J. L. Rubio fue demostrar que el proceso puede invertirse obteniendo desigualdades con peso a partir de desigualdades vectoriales. Este teorema está contenido en [10] y dice así:

Sea Γ una familia de operadores sublineales $T : L^r(\mu) \to L^r(\nu)$. Supongamos que

$$\left\| \left(\sum_k |T_k f_k|^r \right)^{1/r} \right\|_p \leq C \left\| \left(\sum_k |f_k|^r \right)^{1/r} \right\|_p, \quad T_k \in \Gamma, \quad 0 < r, p < \infty. \tag{2}$$

Entonces:

Si $r < p$ y $\alpha = /r$, dado $u \in L^{\alpha'}(\nu)$, $u \geq 0$, existe $U \in L^{\alpha'}(\mu)$, $U \geq 0$ tal que

$$\|U\|_{\alpha'} \leq \|u\|_{\alpha'}$$

y

$$\int |Tf|^r \, u \, d\nu \leq C \int |f|^r \, U \, d\mu, \qquad T \in \Gamma.$$

Si $r > p$, también hay un resultado paralelo.

J. L. Rubio llegó a este resultado a través de la teoría de Maurey de factorización de operadores, en la que se interesó a raíz de la conferencia de John Gilbert en Williamstown [47].

La equivalencia entre desigualdades vectoriales y desigualdades con peso le permitió a J. L. Rubio resolver en [9] los problemas de dos pesos planteados por Muckenhoupt que consisten en dar condiciones necesarias y suficientes sobre un peso W para que cierto operador (el operador maximal de Hardy-Littlewood, una integral singular, etc.) sea acotado de $L^p(W)$ en $L^p(u)$ para algún peso u o bien de $L^p(u)$ para algún u, en $L^p(W)$. Si además la familia de operadores es invariante por dilataciones y rotaciones, pueden obtenerse desigualdades con pesos de la forma $|x|^\alpha$ a partir de desigualdades vectoriales. Este es el contenido del trabajo [13], donde aparecen, entre otras, desigualdades con peso para el operador maximal de las medias esféricas de Stein, el operador maximal de A. Córdoba, y los multiplicadores de Bochner-Riesz.

Una vez establecida la equivalencia entre desigualdades vectoriales y desigualdades con peso, surgió de manera natural el problema de obtener desigualdades con un mismo peso en los dos lados. Esto dió lugar a lo que José Luis Rubio llamaba, en plan humorístico, la "teoría del peso unificado polivalente" y que es lo que actualmente se conoce como el "algoritmo de Rubio de Francia" (ver [39]). Lo explicaré con algún detalle, porque es un magnífico ejemplo de cómo las ideas más sencillas se convertían en instrumentos poderosos en manos de José Luis Rubio. En concreto, después de la publicación de los trabajos [12] y [16], la teoría de los pesos A_p de Muckenhoupt sufrió una verdadera revolución. La idea fundamental está contenida en el siguiente lema:

Sea S un operador sublineal acotado en $L^p(\mu)$ donde $p \geq 1$ y μ una medida positiva arbitraria. Supongamos que $Sf \geq 0$ para cada $f \in L^p(\mu)$. Entonces, para cada $u \geq 0$ en $L^p(\mu)$ existe $v \geq 0$ en $L^p(\mu)$ tal que:

i) $u(x) \leq v(x)$ *para c. t. x.*

ii) $\|v\|_p \leq 2\,\|u\|_p$.

iii) $Sv(x) \leq C\,v(x)$ *para c. t. x.*

Para demostrar este lema basta tomar

$$v = \sum_{j=0}^{\infty} (2\,\|S\|)^{-j}\; S^j u.$$

Basándose en este lema, José Luis Rubio consiguió dar una demostración elemental del teorema de factorización de P. Jones [48] y además descubrir el teorema de extrapolación, que es uno de los resultados más notables de la teoría de los pesos A_p.

El teorema de factorización dice que *todo peso de la clase A_p (aquellos w para los que el operador maximal de Hardy-Littlewood M es acotado en $L^p(W)$) es de la forma $W = W_0\,W_1^{1-p}$ donde W_0 y W_1 pertenecen a A_1, es decir*

$$MW_j \leq C\,W_j, \qquad j = 0, 1, \qquad 1 < p < \infty.$$

De hecho, José Luis Rubio probó el siguiente principio general, que contiene al teorema de P. Jones: *Sea T un operador sublineal positivo. Para $1 < p < \infty$, consideramos*

$$W_p = \{w:\ 0 \leq w(x) < \infty \text{ en c.t. } x \text{ y } T \text{ es acotado en } L^p(w)\}$$

y para $p = 1$:

$$W_1 = \{w:\ 0 \leq w(x) < \infty \text{ y } Tw(x) \leq C\,w(x)\}.$$

Entonces para cada $1 < p < \infty$*, tenemos*

$$W_p \cap W_{p'}^{1-p} \subset W_1\, W_1^{1-p}.$$

He aquí la demostración: Basta considerar el caso $1 < p \leq 2$. Sea $w \in W_p \cap W_{p'}^{1-p}$, es decir: $w \in W_{p'}$, $w^{1/(p-1)} \in W_{p'}$. Queremos ver que $w = w_0\, w_1^{1-p}$ con $w_0, w_1 \in W_1$. Después de escribir $v^{-1} = w_1^{1-p}$, vemos que esto equivale a encontrar v tal que:

a) $v\, w \in W_1$, o sea $T(v\, w) \leq C\, v\, w$ y también

b) $v^{1/(p-1)} \in W_1$, o sea $T\left(v^{1/(p-1)}\right) \leq C\, v^{1/(p-1)}$, o equivalentemente $T\left(v^{1/(p-1)}\right)^{p-1} \leq C\, v$.

Supongamos que para cada u en algún L^q podemos encontrar Su tal que

$$|T(u\, w)| \leq S(u)\, w$$

$$\left(T\left(|u|^{1/(p-1)}\right)\right)^{p-1} \leq S(u).$$

Si el operador S satisface las hipótesis del lema, encontraríamos $v \geq 0$ tal que $Sv \leq C\, v$ y esto sería suficiente pues entonces

$$T(v\, w) \leq S(v)\, w \leq C\, v\, w$$

$$T\left(v^{1/(p-1)}\right)^{p-1} \leq S(v) \leq C\, v.$$

Basta elegir

$$Su = |T(u\, w)|\, w^{-1} + T\left(|u|^{1/(p-1)}\right)^{p-1}$$

y comprobar que tiene las propiedades requeridas. En concreto, es acotado en $L^{p'}(w)$.

En cuanto al teorema de extrapolación de José Luis Rubio dice así: *Sea T un opeardor sublineal. Sean $1 \leq r < \infty$, $1 < p < \infty$. Supongamos que T es acotado en $L^r(w)$ para cada $w \in A_r$. Entonces, para cada $w \in A_p$, T es acotado en $L^p(w)$.* También hay una versión con tipo débil en lugar de tipo fuerte.

Este teorema es la culminación de una filosofía expresada perfectamente mediante la frase que A. Córdoba popularizó en el Departamento: "L^p no existe; sólo existe L^2 con peso".

Recuerdo el momento en que José Luis me comunicó el teorema de extrapolación, durante un almuerzo poco antes de la Navidad de 1981. Su demostración partía de las desigualdades vectoriales. La obtuvo sin escribir una sola línea, viniendo de casa en autobús aquella misma mañana. Durante todo el mes de enero yo estuve buscando una prueba del teorema de extrapolación que sólo utilizara la teoría A_p. Esta prueba apareció en [46]. Por su parte Coifman, P. Jones y J. L. Rubio [18] utilizaron estas ideas con la transformada de Hilbert en lugar del operador maximal, para dar una versión débil del teorema de Helson-Szegö y una nueva demostración de la dualidad H^1–BMO.

Fue en 1981 cuando comencé a escribir con José Luis Rubio nuestro libro [21]. El proyecto nos llevó cuatro años y para mí fue una experiencia maravillosa. La motivación para obtener nuevas demostraciones de los teoremas de factorización, Helson-Szegö, extrapolación, etc., provenía en gran medida, de la necesidad de presentar el material en el libro.

1981 fue el año en que José Luis Rubio vino a la Universidad Autónoma de Madrid desde la Universidad de Zaragoza. Yo también llegué en aquel año al Departamento procedente de Salamanca. Eran momentos de optimismo y esperanza para nuestro grupo.

Otro gran teorema de José Luis Rubio es la desigualdad de Littlewood-Paley para intervalos arbitrarios [15], [25]. Lo probó en septiembre de 1983, en una visita al Instituto Mittag-Leffler, del que siempre habló maravillas. El teorema es el siguiente: *Si para un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ llamamos S_I al operador de suma parcial dado por $(S_I f)^\wedge = \chi_I \hat{f}$ y consideramos, para cualquier sucesión $\{I_k\}$ de intervalos disjuntos, el funcional cuadrático*

$$\Delta f(x) = \left(\sum_k |S_{I_k} f(x)|^2 \right)^{1/2},$$

se tiene, para $2 \leq p < \infty$

$$\|\Delta f\|_p \leq C_p \, \|f\|_p.$$

Cuando los intervalos $\{I_k\}$ son congruentes, el resultado fue probado anteriormente por L. Carleson [40] y, con una demostración diferente, por A. Córdoba [42], que lo usó para obtener estimaciones L^p de los multiplicadores de Bochner-Riesz [43]. El propio José Luis Rubio dió una demostración muy sencilla de este caso [14], que es el germen para el tratamiento del caso general.

El teorema de Littlewood-Paley para intervalos arbitrarios es un trabajo de orfebrería en el que juega un papel fundamental la teoría de las integrales singulares vectoriales elaborada por José Luis Rubio, junto con sus estudiantes F. J. Ruiz y J. L. Torrea [19], [26]. Esta teoría arranca del trabajo de Benedeck, Calderón y Panzone

[38]; pero, puesta al día convenientemente con técnicas desarrolladas con posterioridad como son BMO, el operador $f^{\#}$, espacios de Hardy, etc., llegó a ser, en manos de José Luis Rubio, un arma muy poderosa.

Cabe esperar que la desigualdad de Littlewood-Paley para intervalos arbitrarios, que yo considero como una de las cimas de la obra de J. L. Rubio, juegue en el futuro un papel muy importante en el Análisis de Fourier. Hasta ahora la única aplicación que yo conozco es el teorema sobre multiplicadores obtenido por J. L. Rubio junto con R. Coifman y S. Semmes [34].

Otra de las contribuciones fundamentales de J. L. Rubio ha sido la formulación de teoremas generales muy simples que han dado una forma definitiva a la teoría de integrales singulares y operadores maximales sobre objetos con curvatura, basada en la transformada de Fourier. Esta teoría arranca de Stein y Wainger [51] y fue abordada por J. L. Rubio en la tesis de su estudiante J. Duoandikoetxea. Su trabajo conjunto [29] es un modelo de elegancia y potencia, pues permite obtener de forma muy sencilla todo lo que se conocía hasta entonces y también permite ir bastante más allá. Este método ha inspirado los trabajos [30] y [31], hechos en colaboración con varios matemáticos, y también el trabajo de J. L. Rubio [28] donde se formula un resultado general que incluye el teorema de Stein [50] sobre medias esféricas con una prueba muy simple. La colaboración con J. Duoandikoetxea incluye también aplicaciones muy finas del clásico método de rotaciones de Calderón-Zygmund [22], [27]. Por ejemplo, en [22] se demuestra con este método la invariancia respecto de la dimensión de la norma de las transformadas de Riesz en L^p, obteniendo un tratamiento de este resultado de Stein mucho más simple que el original.

La noticia de que tenía cáncer no lo desestabilizó. Nunca tuvo duda de que superaría la enfermedad. Durante el último año de su vida, y entre sesión y sesión de quimioterapia, escribió, y él mismo compuso en su ordenador personal, el trabajo [37], que es una pequeña obra maestra dedicada a uno de sus temas favoritos: los multiplicadores de Bochner-Riesz. Este último trabajo de José Luis aparcereá en el Duke Mathematical Journal. Está relacionado con [35], que es una colaboración con A. Carbery y L. Vega.

Nunca perdió su interés por áreas fronterizas del Análisis de Fourier, como son la Geometría de los espacios de Banach y la teoría de la Probabilidad. Tuvo mucho contacto personal con figuras muy importantes de estas áreas como J. Bourgain, G. Pisier, y realizó aportaciones originales como prueban sus trabajos [24], [32] y [33].

José Luis Rubio era además un excelente profesor, que dedicaba mucha energía a sus alumnos de todos los niveles. Sus clases tenían la misma claridad y brillantez que se percibe en sus artículos de investigación. Los estudiantes valoraban mucho esta dedicación y siempre daban a José Luis las mejores puntuaciones en las encuestas sobre docencia.

Ante la pérdida de una persona de la estatura moral y científica de José Luis Rubio sólo cabe esforzarse porque su ejemplo y sus ideas fructifiquen en nuestros corazones y en nuestras cabezas e iluminen a las generaciones que nos han de suceder sobre esta tierra.

José García-Cuerva

Trabajos de José Luis Rubio de Francia

[1] Convergencia casi segura de operadores definidos sobre funciones vectoriales, en *Actas del V Congreso de la Agrupación de Matemáticos de Expresión Latina*, 1978.

[2] Nets of subgroups in locally compact groups, *Annales Soc. Mat. Polonæ* I **20** (1978), 453–466.

[3] On the convergence of double Fourier series, *Bull. Acad. Pol. Sci.* **27** (1979), 349–354.

[4] El espacio de la convergencia en medida y su dual, *Rev. Real Acad. Ciencias Madrid* **74** (1980), 267–282.

[5] Vector valued inequalities for operators in L^p spaces, *Bull. London Math. Soc.* **12** (1980), 211–215.

[6] Continuity and pointwise convergence of operators in vector valued L^p spaces, *Bolletino U. M. I.* (5) **17**–B (1980), 650–660.

[7] Convergencia de series de Fourier de infinitas variables, *Pub. Mat. U. A. B.* **21** (1980), 237–241.

[8] Vector valued inequalities for Fourier series, *Proc. Amer. Math. Soc.* **78** (1980), 525–528.

[9] Boundedness of maximal functions and singular integrals in weighted L^p spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **83** (1981), 673–679.

[10] Weighted norm inequalities and vector valued inequalities, en *Harmonic Analysis*, ed. F. Ricci and G. Weiss, Lecture Notes in Math. 908, Springer, Berlin, 1982.

[11] Some problems arising from prediction theory and a theorem of Kolmogorov, *Collect. Math.* **33** (1982), 249–257. Coautor J. J. Guadalupe.

[12] Factorization and extrapolation of weights, *Bull. Amer. Mat. Soc.* **7** (1982), 393–395.

[13] Weighted norm inequalities for homogeneous families of operators, *Trans. Amer. Mat. Soc.* **275** (1983), 781–790.

[14] Estimates for some square functions of Littlewood-Paley type, *Pub. Mat. U. A. B.* **27** (1983), 81–108.

[15] *A Littlewood-Paley Inequality for Arbitrary Intervals*, Inst. Mittag-Leffler Report No. 18, 1983.

[16] A new technique in the theory of A_p–weights, en *Proceedings of the Seminar*

Held in Torino and Milano, Int. Francesco Severi, Roma, 1983.

[17] Vector extensions of operators in L^p spaces, *Pacific J. Math.* **105** (1983), 227–235. Coautor J. L. Torrea.

[18] Constructive decomposition of BMO functions and factorization of A_p weights, *Proc. Amer. Math. Soc.* **87** (1983), 675–676. Coutores R. Coifman y P. Jones.

[19] Les opérateurs de Calderón-Zygmund vectoriels, *C. R. Acad. Sci. Paris* **297** (1983), 477–480. Coautores F. J. Ruiz y J. L. Torrea.

[20] Some maximal inequalities, en *Recent Progress in Fourier Analysis*, ed. I. Peral and J. L. Rubio, North-Holland Math. Studies 111, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[21] La verdad en las Matemáticas, en *III Jornadas sobre aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas*, Zaragoza, 1984.

[22] *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North-Holland Math. Studies 116, North-Holland, Amsterdam, 1985. Coautor J. García-Cuerva.

[23] Estimations indépendantes de la dimension pour les transformées de Riesz, *C. R. Acad. Sci. Paris* **300** (1985), 193–196. Coautor J. Douandikoetxea.

[24] Fourier series and Hilbert transforms with values in UMD Banach spaces, *Studia Math.* **81** (1985), 95–105.

[25] A Littlewood-Paley inequality for arbitrary intervals, *Rev. Mat. Iberoamericana* **1** (1985), 1–14.

[26] Calderón-Zygmund theory for operator-valued kernels, *Adv. in Math.* **62** (1986), 7–48. Coautores F. J. Ruiz y J. L. Torrea.

[27] Maximal operators related to the Radon transform and the Calderón-Zygmund method of rotations, *Duke Math. J.* **53** (1986), 189–209. Coautores M. Christ y J. Douandikoetxea.

[28] Maximal functions and Fourier transforms, *Duke Math. J.* **53** (1986), 395–404.

[29] Maximal and singular integral operators via Fourier transform estimates, *Invent. Math.* **84** (1986), 541–561. Coautor J. Douandikoetxea.

[30] Estimates for Wainger's singular integrals along curves, *Rev. Mat. Iberoamericana* **2** (1986), 105–117. Coautor A. Córdoba.

[31] Estimates for maximal functions and Hilbert transforms along flat convex curves in $\mathbb{R}^2$, *Bull. Amer. Mat. Soc.* (new series) **14** (1986), 263–267. Coautores H. Carlsson, M. Christ, A. Córdoba, J. Douandikoetxea, J. L. Vance, S. Wainger y D. Weinberg.

[32] Martingale and integral transforms of Banach space valued functions, en *Probability and Banach Spaces*, Lecture Notes in Math. 1221, Springer, Berlin, 1987.

[33] Linear operators in Banach lattices and weighted L^2 inequalities, *Math. Nachr.* **133** (1987), 197–209.

[34] Multiplicateurs de Fourier de $L^p(\mathbb{R})$ et estimations quadratiques, aparecerá en *C. R. Acad. Sci. Paris*. Coutores R. Coifman y S. Semmes.

[35] Almost everywhere summability of Fourier integrals, aparecerá en *J. London Math. Soc.*. Coautores A. Carbery y L. Vega.

[36] Some Banach techniques in vector-valued Fourier analysis, aparecerá en *Colloq. Math.*. Coautor J. L. Torrea.

[37] Transference principles for radial multipliers, aparecerá en *Duke Math. J.*

Otras referencias

[38] A. BENEDECK, A. P. CALDERÓN AND R. PANZONE, Convolution operators on Banach space valued functions, *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* **48** (1962), 356–365.

[39] S. BLOOM, Solving weighted norm inequalities using the Rubio de Francia algorithm, *Proc. Amer. Math. Soc.* **101** (1987), 306–312.

[40] L. CARLESON, *On the Littlewood Paley Theorem*, Inst. Mittag-Leffler Report, 1967.

[41] R. COIFMAN AND R. ROCHBERG, Another characterization of BMO, *Proc. Amer. Math. Soc.* **79** (1980), 249–254.

[42] A. CÓRDOBA, Some remarks on the Littlewood-Paley theory, *Rend. Circ. Matem. Palermo* II **1** (1981), Suppl. 75–80.

[43] A. CÓRDOBA, A note on the Bochner-Riesz operators, *Duke Math. J.* **46** (1979), 505–511.

[44] A. CÓRDOBA AND C. FEFFERMAN, A weighted norm inequality for singular integrals, *Studia Math.* **57** (1976), 97–101.

[45] C. FEFFERMAN, On the divergence of multiple Fourier series, *Bull. Amer. Math. Soc.* **77** (1971), 191–195.

[46] J. GARCÍA-CUERVA, An extrapolation theorem in the theory of A_p weights, *Proc. Amer. Math. Soc.* **83** (1983), 422–426.

[47] J. E. GILBERT, Nikishin-Stein theory and factorization with applications, *Proc.*

Symp. Pure Math. **35** (2) (1979), 233-267.

[48] P. W. JONES, Factorization of A_p weights, *Ann. of Math.* **111** (1980), 511–530.

[49] R. A. HUNT AND W. S. YOUNG, A weighted norm inequality for Fourier series, *Bull. Amer. Math. Soc.* **80** (1974), 274–277.

[50] E. M. STEIN, Maximal functions: Spherical averages, *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* **73** (1976), 2174–2175.

[51] E. M. STEIN AND S. WAINGER, Problems in harmonic analysis related to curvature, *Bull. Amer. Math. Soc.* **84** (1978), 1239–1295.