GEOMETRÍA SIMPLECTICA EN LA TEORÍA CLÁSICA DE CAMPOS

por

PEDRO L. GARCÍA

INTRODUCCIÓN

El objeto de esta memoria es definir, bajo condiciones suficientemente generales y con la máxima naturalidad posible, la estructura simplectica subyacente a la Teoría clásica de campos. Con ello intentamos obtener una aclaración, a nivel de las nociones de la Geometría diferencial moderna, de la Dinámica de campos, equivalente en parte, a aquella aclaración de la Mecánica que representó el paso de la formulación de NEWTON a la de HAMILTON-JACOBI.

Según es bien sabido, la formulación newtoniana de la Mecánica presupone una mezcla no aclarada de Geometría euclideana, estructura mecánica y hasta ciertos datos de definición casi experimental. Frente a esto, la formulación de HAMILTON-JACOBI proporcionó el primer ejemplo de lo que habría de ser el esquema fundamental de la física actual. Según dichos autores, a la base del estudio de todo sistema dinámico se encuentran dos datos en dualidad: el conjunto X de los *estados* y el conjunto A de los *observables*. Los estados son las *posiciones-impulso* por las que puede pasar el sistema, y los observables son las tan llamadas *magnitudes dinámicas* (energía, momentos lineal y angular, etc.). Cada observable establece una correspondencia de los estados en los números reales, interpretándose el número real $f(x)$ que un observable f hace corresponder a un estado x como el *resultado de la medida* de f de x. De las propiedades de continuidad y diferenciabilidad que se admite tienen los aparatos de medida clásicos se sigue que la pareja (X, A) debe ser una variedad diferenciable. Se supone que es una variedad de dimensión finita donde la dimensión se interpreta como el *número de grados de libertad* del sistema. En este lenguaje, la evolución del sistema dinámico viene definida por un pseudogrupo uniparamétrico de automorfismos de la variedad.

Puestas las cosas de este modo, el problema fundamental que se plantea la Dinámica analítica es ver qué especial tipo de estructura hay que añadir a una variedad diferenciable abstracta (X, A) para que los puntos de X sean los estados de posición-impulso de un sistema dinámico. La solución a este problema que da la teoría de HAMILTON-JACOBÍ representa una de las más grandes adquisiciones de la física moderna. Según dicha teoría, lo que se debe añadir a la variedad es una especial estructura de álgebra de LIE sobre el conjunto A de los observables. Se trata de la bien conocida *álgebra de* POISSON. Una solución más geométrica, equivalente a ésta, es la propuesta por POINCARÉ. Consiste en dar sobre la variedad una *métrica simplectica*, esto es, una 2-forma ω_2 cerrada e irreducible. La variedad dotada de esta métrica constituye lo que se denomina una *variedad simplectica*. En términos de esta estructura todas las nociones dinámicas pueden ser ahora definidas de un modo intrínseco y global. Por ejemplo, la evolución del sistema dinámico viene definida por el pseudogrupo uniparamétrico de automorfismos de la variedad generado por el campo vectorial D único tal que $i_D\,\omega_2 = -\,dH$, donde H es un observable especialmente importante del sistema dinámico llamado su *hamiltaniana*. (La condición anterior que define al campo D constituye la versión, en este formalismo, de las ecuaciones de HAMILTON del sistema dinámico). Las isometrías de la métrica simplectica son las tan llamadas *transformaciones canónicas* de la Mecánica. Los sistemas de coordenadas locales $(q_i\ p_i)$, respecto de las cuales ω_2 toma la expresión $\sum_i dq_i \wedge dp_i$, son las *coordenadas canónicas*, etc. etc.

Pues bien, el objeto de este trabajo es demostrar, en general, que el esquema simplectico de la Mecánica, anteriormente esbozado, es válido en Teoría de campos, sin más que sustituir la variedad diferenciable básica, de dimensión finita, de la Mecánica, por una variedad diferenciable de dimensión infinita localmente espacio de BANACH. Para ser más precisos, por una variedad obtenida de una subvariedad de un espacio de BANACH por una proyección diferenciable. Llanamente hablando, la subvariedad corresponde al conjunto de los *datos de* CAUCHY asociado a las ecuaciones de campo, mientras que la proyección es una expresión de la eventual *gauge* que puede arrastrar dicho campo.

Trabajos con las perspectivas del que aquí presentamos creemos han sido realizados casi exclusivamente por I. Segal y su escuela (véanse p.e. (12), (13) y (14)) motivados principalmente por el problema de la cuantificación de campos. Este autor estudia con detalle el caso de un campo escalar sobre el espacio-tiempo de Minkowski definido por una ecuación en derivadas parciales hiperbólica no lineal. La variedad diferenciable básica que considera es la *variedad de soluciones* de la ecuación de campo y la métrica simplectica es definida a través del *propagador* asociado a dicha ecuación. De este modo se recae esencialmente en la teoría de los propagadores relativos a una ecuación en derivadas parciales hiperbólica. Esta teoría ha sido tratada con detalle, en el caso lineal, por A. Lichnerowicz utilizando la teoría general de Leray (véase p.e. (5)).

El procedimiento seguido aquí es totalmente distinto. Lo hemos fundado en un análisis intrínseco y global previo de los procesos variacionales en la Teoría clásica de campos. La observación del caso de la Mecánica a la luz de este análisis nos proporciona un esquema tal, que a partir del mismo, y de un modo casi directo, podemos obtener la generalización que buscamos. Es oportuno señalar aquí, que esta idea, de partir de un principio variacional para construir las nociones dinámicas, ha sido básica en el desarrollo de la física desde los tiempos de Lagrange y que aún en la actualidad sigue proporcionando importantes resultados, en física clásica y cuántica, después de los trabajos de Dirac, Bergmann, Schwinger y otros sobre Dinámica de Campos (véanse p.e. de (6) a (11)).

Las etapas fundamentales del trabajo pueden ser esquematizadas como sigue.

Lo primero que necesitamos es formular globalmente la noción de *campo* en el sentido de sistema físico definido por una cierta lagrangiana. Para ello damos como dato previo un fibrado vectorial $B \xrightarrow{\pi} V$ sobre una variedad V dotada de un elemento de volumen ω. V coincide, en los ejemplos usuales, con el espacio de los *sucesos* de las teorías relativistas, mientras que los puntos de B significan, físicamente, los posibles *estados de vibración* del campo en cada suceso. En este lenguaje, las *configuraciones* posibles del campo sobre la variedad V son, precisamente, las secciones transversales del fibrado B. Si φ es una tal configuración y x es un suceso, para cada vector tangente $D_x \in V_x$, el vector tangente $(d\varphi)_x\, D_x \in B\varphi_{(x)}$ nos proporciona, en primera aproximación, una medida del cambio que experimenta la configuración φ del campo cuando nos separamos infinitesimalmente del suceso x según la dirección D_x. Entonces, la inyección lineal $(d\varphi)_x$ puede considerarse como una *primera aproximación* de la configuración φ del campo en la vecindad del suceso x. El conjunto $\bar{B}$ de todas estas *primeras aproximaciones* puede dotarse de una estructura de fibrado vectorial $\bar{B} \xrightarrow{\bar{\pi}} V$ sobre la variedad V. Este fibrado constituye el objeto básico sobre el que construimos toda la teoría posterior.

La lagrangiana $\mathcal{L}$ del campo viene definida ahora como una función diferenciable real sobre el fibrado $\bar{B}$. A partir de aquí, y sin necesidad de ningún otro dato, podemos desarrollar la Teoría variacional. El concepto fundamental alrededor del cual gira toda la construcción es el de *transformación infinitesimal de contacto generalizada* (versión intrínseca de las variaciones simbólicas δ del Cálculo de variaciones clásico). Esta noción se introduce como sigue. El fibrado $\bar{B}$ puede dotarse, canónicamente, de una 1-forma θ con valores en el A-módulo M de las aplicaciones diferenciables F, de $\bar{B}$ en B, tales que $\pi . F = \bar{\pi}$ (A es el álgebra de las funciones diferenciables de $\bar{B}$). Entonces, una transformación infinitesimal de contacto generalizada es un campo vectorial D de $\bar{B}$ tal que, para toda ley de derivación ∇ en el A-módulo M, se verifica $L_D \theta = f\theta$, donde $f \in \mathrm{Hom}_A (M,M)$. El Teorema fundamental de esta parte del trabajo es lo que llamamos *fórmula fundamental de variación*. A partir de ésta se obtienen los siguientes resultados importantes: una expresión global de las *ecuaciones de campo de* EULER-LAGRAGE, una definición, también global, de la noción de *problema variacional invariante* por un grupo de LIE, y finalmente, una adecuada formulación del Teorema de E. NOETHER relativo a tales problemas invariantes, obteniendo de este modo una versión intrínseca y global de los tan llamados *invariantes de* E. NOETHER del Cálculo de variaciones clásico.

Analizando ahora, a la luz de estos resultados, el caso de la Mecánica, obtenemos una formulación de ésta muy especialmente adecuada para obtener una natural generalización a la Teoría de campos de las nociones dinámicas. Los dos conceptos más importantes que ahora intervienen aquí son los de *campo conservativo* y *hamiltaniana de un campo*.

Por analogía con la Mecánica suponemos que sobre el fibrado $B \xrightarrow{\pi} V$ del campo opera un grupo uniparamétrico G de automorfismos del fibrado tal que, el grupo G_0 inducido por G sobre la variedad base V es un grupo uniparamétrico conexo de automorfismos globales de V, que no deja fijo ningún punto de V y que deja invariante el elemento de volumen ω de V (en los ejemplos usuales este grupo significa físicamente el *paso del tiempo*). Entonces, se dice que el campo considerado es *conservativo* cuando es invariante por el grupo G en el sentido de la Teoría variacional. Esta noción de invarianza determina, salvo una constante multiplicativa, un sólo invariante de E. NOETHER al cual llamamos *densidad hamiltaniana* del campo.

A partir de aquí la Teoría la desarrollamos como sigue. Tomamos una subvariedad V' de V tal que: $\dim V' = \dim V - 1$ y transversal a las trayectorias de G_0 (en las teorías relativistas, en donde V es una variedad dotada de una métrica riemanniana hiperbólico-normal, V' se supone es de *género espacial* y significa, físicamente, el espacio tridimensional en donde se experimenta). Consideramos el espacio vectorial $\mathfrak{E}$ de las secciones transversales σ, a soporte compacto, del fibrado $\overline{B}_{V'}$ (restricción del fibrado $\overline{B} \xrightarrow{\bar{\pi}} V$ a la subvariedad V') soluciones de la 1-forma canónica θ. En la teoría relativista del campo escalar libre la función $H : \sigma \in \mathfrak{E} \to (\int_\sigma \mathcal{H})^{1/2}$ donde $\mathcal{H}$ es la densidad hamiltaniana del campo, verifica las propiedades de una norma. Nosotros generalizamos este hecho admitiendo ahora que sobre el espacio $\mathfrak{E}$ tenemos definida una norma $\| \ \|$ del tipo siguiente: $\| \ \| : \sigma \in \mathfrak{E} \to (\int_\sigma \mathcal{H}')^{1/2}$ donde $\mathcal{H}'$ es una forma de $\overline{B}$ de grado $\dim V - 1$. Finalmente, tomamos la completación $\overline{\mathfrak{E}}$ de $\mathfrak{E}$ respecto de dicha norma. A partir de la densidad hamiltaniana y del término final de la fórmula fundamental de variación se definen sobre $\overline{\mathfrak{E}}$ la hamiltaniana H del campo y la 2-forma ω_2 fundamental, respectivamente. Disponiendo ahora de $\overline{\mathfrak{E}}$, H y ω_2, se pueden definir las ecuaciones de HAMILTON del campo, en cada punto del espacio $\overline{\mathfrak{E}}$, procediendo igual que en Mecánica. Para poder terminar ahora la Teoría debemos hacer intervenir en este punto el eventual problema de *ligaduras y gauges* que puede arrastrar el campo.

Efectivamente, las ecuaciones de HAMILTON que hemos definido no tienen porqué ser *compatibles* en todos los puntos de $\overline{\mathfrak{E}}$. Este inconveniente se evita restringiendo todas las nociones que tenemos a la subvariedad $\mathcal{V}$ de $\overline{\mathfrak{E}}$ caracterizada por las condiciones siguientes: *a)* las ecuaciones de HAMILTON restringidas a $\mathcal{V}$ son compatibles en todos los puntos de $\mathcal{V}$; y *b)* $\mathcal{V}$ es maximal respecto de *a)*. Esta subvariedad constituye la expresión en nuestro formalismo del sistema de ligaduras secundarias del campo en sentido de BERGMANN-DIRAC. Naturalmente, el problema de existencia de esta subvariedad es cuestión que ha de resolverse para cada campo en particular.

Las ecuaciones de HAMILTON sobre $\mathcal{V}$ así obtenidas, si bien ya tienen solución, ésta no tiene porqué ser única debido a que la restricción $(\omega_2)_V$ a V de la 2-forma ω_2 no es irreducible en general. Para evitar esta situación, la cual es muy insatisfactoria desde el punto de vista del determinismo que se quiere en dinámica clásica, hemos procedido como sigue. El radical de $(\omega_2)_V$ (esto es, el conjunto de los campos vectoriales D de V tales que $i_D(\omega_2)_V = 0$) define sobre V una distribución. Si ésta es totalmente integrable, y si el conjunto $\bar{V}$ de sus subvariedades integrales máximas puede ser dotado de una estructura diferenciable respecto de la cual la proyección canónica $\pi : V \rightarrow \bar{V}$ es diferenciable, entonces, se demuestra que toda la estructura que tenemos sobre V es proyectable por π sobre $\bar{V}$ y que en la estructura proyectada las nuevas ecuaciones de HAMILTON tienen una solución única. Este proceso constituye la versión en nuestro formalismo del problema de las *ligaduras primarias o gauges* del campo. Este resultado es importante por poner claramente de manifiesto que la aparición de las gauges en la teoría de campos es debida a la posibilidad de que la métrica simplectica correspondiente sea reducible.

La variedad $\bar{V}$ dotada de la 2-forma $\overline{\omega_2}$ (proyección sobre $\bar{V}$ de la 2-forma $(\omega_2)_V$) es la variedad simplectica sobre la cual se deben definir todas las nociones dinámicas del campo considerado.

Llegado aquí, el Teorema fundamental de la última parte de este trabajo, tiene por objeto establecer la conexión que existe entre las ecuaciones de HAMILTON del campo y las secciones transversales estacionarias de la Teoría variacional. Este Teorema nos proporciona una aclaración definitiva del sentido que tiene el tan llamado *paso* de la formulación lagrangiana a la formulación hamiltaniana en la Teoría general de Campos.

Esta memoria fue presentada como tesis doctoral en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Barcelona (España) el día 27 de julio de 1967. Deseo expresar aquí mi más profundo reconocimiento al Profesor SANCHO GUIMERÁ, director de este trabajo, maestro y amigo, a quien le debo, entre otras muchas cosas, mi cada vez mayor afición por los problemas matemáticos.

1

FIBRADO DE LAS APROXIMACIONES TANGENTE DE LAS SECCIONES TRANSVERSALES DE UN FIBRADO VECTORIAL

1.1 *Definición y 1-forma canónica.*

Sea $B \xrightarrow{\pi} V$ un fibrado vectorial de dimensión n sobre una variedad V de dimensión m, A el álgebra de las funciones diferenciables de V y M el A-módulo de las secciones transversales de B. Para cada punto $x \in V$, sea A_x el álgebra de los gérmenes en x de las funciones de A y M_x el A_x-módulo de los gérmenes en x de las secciones de M.

Si I_x es el ideal de los gérmenes de A_x que se anulan en x, consideremos la sucesión exacta:

$$0 \to I^2_x \to A_x \to A_x/I^2_x \to 0$$

Es fácil comprobar que A_x/I^2_x es un álgebra de dimensión $m + 1$. Correspondientemente tenemos la sucesión exacta:

$$0 \to I^2_x M_x \to M_x \to M_x/I^2_x M_x \to 0$$

Sea $\overline{E}_x = M_x/I^2_x M_x$, $\overline{B} = \bigcup_{x \in V} \overline{E}_x$ y definamos $\overline{\pi} : \overline{B} \to V$ por la condición $\overline{\pi}(\overline{E}_x) = x$.

Como M es un módulo localmente libre de rango n, para todo punto $x \in V$ podemos encontrar un entorno U de x en el que hay definidas n secciones $\phi^1 \ldots \phi^n$ tales que, para todo abierto $U' \subset U$, $\phi^1{}_{U'} \ldots \phi^n{}_{U'}$ definen una base de $M_{U'}$ sobre $A_{U'}$. Entonces, para todo $x \in U$, los gérmenes de $\phi^1{}_x \ldots \phi^n{}_x$ definen una base de M_x sobre A_x y, por tanto, sus imágenes respectivas $\overline{\phi}^1_x \ldots \overline{\phi}^n_x$ en el espacio cociente $\overline{E}_x$ definirán una base de $\overline{E}_x$ sobre A_x/I^2_x. Supongamos ahora que en U tenemos un sistema de coordenadas locales $(x_1 \ldots x_m)$. Entonces, las imágenes 1, $(dx_1)_x, \ldots, (dx_m)_x$ en el espacio cociente A_x/I^2_x de las funciones 1, $x_1 - x_1(x), \ldots, x_m - x_m(x)$, respectivamente, definirán una base de A_x/I^2_x sobre R. Entonces $(\overline{\phi}^j_x,\ (d\ x_i)_x \cdot \overline{\phi}^j_x)$ $i = 1 \ldots m$, $j = 1 \ldots n$, será una base de $\overline{E}_x$ sobre R. La aplicación

$$\overline{\varrho}_U : U \times R^{n+m.n} \to \overline{\pi}^{-1}(U) \subset \overline{B}$$

definida por

$$\bar{\varrho}\,(x,\ a_j,\ b_{ij}) = \sum_j a_j\ \bar{\phi}_x^j + \sum_{ij} b_{ij}\,(dx_i)_x \,.\ \bar{\phi}_x$$

es obviamente una biyección.

Podemos dotar ahora a $\bar{B}$ de una y sólo una estructura diferenciable tal que cada aplicación $\bar{\varrho}_U$ sea un homeomorfismo diferenciable. Con esta estructura, $\bar{B} \xrightarrow{\bar{\pi}} V$ es un fibrado vectorial de dimensión $n + m.\,n$ sobre la variedad V.

DEFINICIÓN 1.

Al fibrado $\bar{B} \xrightarrow{\bar{\pi}} V$ lo llamaremos fibrado de las aproximaciones tangente de las secciones transversales del fibrado vectorial $B \xrightarrow{\pi} V$.

Sea $\bar{P}$ un punto cualquiera de $\bar{B}$, $x = \bar{\pi}\,(\bar{P})$, ϕ_x un germen representante de $\bar{P}$ y ϕ una sección representante de ϕ_x. Definamos $p\,(\bar{P}) = \phi\,(x)$ e $i_{\bar{p}} = (d\phi)_x$.

LEMA 1.

$p\,(\bar{P})$ e $i_{\bar{p}}$ no dependen de los representantes escogidos.

DEMOSTRACIÓN

Si s_x y s es otra pareja de representantes, entonces, en un cierto entorno U de x, se verificará $s = \phi + \sum_i f_i\,\sigma_i$, donde las σ_i son secciones de M_U y las f_i son funciones de A_U tales que $f_i\,(x) = 0$ y $D_x f_i = 0$ para todo $D_x \in V_x$. Entonces obviamente $s\,(x) = \phi(x)$. Vamos a probar ahora que también $(ds)_x = (d\phi)_x$. En efecto, bastará probar que, para todo $D_x \in V_x$, se verifica $(ds)_x\,D_x = (d\phi)_x\,D_x$ sobre las funciones F de B de los dos tipos siguientes: *a)* $F = \mathrm{f}\,.\,\pi$, donde $f \in A_U$ y *b)* F lineal sobre las fibras de B. Para el tipo *a)* es evidente. Para el tipo *b)* tendremos:

$$(ds)_x\,D_x\,F = D_x\,(F.\,s) = D_x\,(F.\,\phi + \sum_i f_i\,F.\,\sigma_i) = D_x\,(F.\,\phi) +$$

$$+ \sum_i D_x f_i\,(F.\,\sigma_i)\,(x) + f_i\,(x)\,D_x\,(F.\,\sigma_i) = D_x\,(F.\,\phi) = (d\phi)_x\,D_x\,F$$

pues $f_i\,(x) = 0$ y $D_x f_i = 0$.

c.q.d.

De este modo, a cada punto $\overline{P} \in \overline{B}$ le podemos hacer corresponder canónicamente un punto $p(\overline{P}) \in B$ y una inyección lineal $i_{\overline{p}} : V_x \to B_p$ $(x = \overline{\pi}(\overline{P}))$.

La aplicación $p : \overline{B} \to B$ es una proyección diferenciable tal que $\overline{\pi} = \pi . p$. Tenemos, pues, el siguiente esquema:

$$\begin{tikzcd} \overline{B} \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\overline{\pi}"'] & B \arrow[d, "\pi"] \\ & V \end{tikzcd}$$

La inyección $i_{\overline{p}}$ verifica la condición $B_p = i_{\overline{p}}(V_x) \oplus E_p$, donde $P = p(\overline{P})$, $x = \overline{\pi}(\overline{P})$, B_p es el espacio tangente en P a B y E_p es el subespacio tangente a la fibra que pasa por P. Si denotamos por v el proyector sobre E_p en la descomposición anterior, podemos definir sobre B un campo θ que asigna a cada $\overline{P} \in \overline{B}$ la aplicación lineal $\theta_{\overline{p}} : D \in \overline{B}_{\overline{p}} \to v(dp)_{\overline{p}} D \in E_p$.

Definición 2

Al campo $\theta : \overline{P} \in \overline{B} \to \theta_{\overline{p}}$ lo llamaremos 1-forma canónica sobre $\overline{B}$.

El siguiente Teorema establece una relación importante entre la 1-forma canónica y las secciones de B.

Teorema 1

Para cada sección transversal ϕ del fibrado $B \xrightarrow{\pi} V$ definida en un abierto U, existe una y solo una sección transversal $\overline{\phi}$ del fibrado $\overline{B} \xrightarrow{\overline{\pi}} V$ tal que $p . \overline{\phi} = \phi$ y $\theta_{\overline{\phi}(U)} = 0$.

Demostración

Para cada $x \in U$, sea ϕ_x el germen en x definido por ϕ y $\overline{\phi}_x$ la imagen de ϕ_x en el espacio cociente $\overline{\pi}^{-1}(x)$. La aplicación $\overline{\phi} : x \in$ $\in U \to \overline{\phi}_x \in \overline{\pi}^{-1}(x) \subset \overline{B}$ nos define la sección deseada.

c.q.d.

A $\overline{\phi}$ la llamaremos *subida canónica* de ϕ a $\overline{B}$.

El siguiente Teorema será de utilidad para algunos cálculos locales que haremos posteriormente.

TEOREMA 2

Para todo $x \in V$ existe un entorno U de x con coordenadas locales (x_i), n funciones z_j sobre $\pi^{-1}(U)$ y $m.\,n$ funciones p_{ij} sobre $\bar{\pi}^{-1}(U)$, tales que:

a) (x_i, z_j) es un sistema de coordenadas locales de B sobre $\pi^{-1}(U)$ siendo las z_j lineales sobre las fibras.

b) $(x_i\, z_j\, p_{ij})$ es un sistema de coordenadas locales de $\overline{B}$ sobre $\bar{\pi}^{-1}(U)$ siendo las z_j y p_{ij} lineales sobre las fibras.

c) las diferenciales sobre $\bar{\pi}^{-1}(U)$ definidas por las fórmulas $\theta_j(D) = \theta(D)\, z_j$ toman, respecto de $(x_i\, z_j\, p_{ij})$, las expresiones $\theta_j = dz_j - \Sigma\, p_{ij}\, dx_i$ (*).

DEMOSTRACIÓN

Sea U un entorno de x con coordenadas locales (x_i) y $\phi^1 \ldots \phi^n$ n secciones de B, sobre U, como las consideradas en la construcción del fibrado $\overline{B} \xrightarrow{\bar{\pi}} V$. Entonces, para todo $x \in U$, los gérmenes $\phi_x^1 \ldots \phi_x^n$ definen una base de M_x sobre A_x y, por tanto, sus respectivas imágenes $\dot{\phi}_x^1 \ldots \dot{\phi}_x^n$ en el espacio cociente $M_x / I_x\, M_x = \pi^{-1}(x)$ definen, también, una base de $\pi^{-1}(x)$ sobre $A_x / I_x = R$. Por definición de B, la aplicación $\varrho_U : U \times R^n \to \pi^{-1}(U) \subset B$ definida por $\varrho(x, a_j) = \sum_j a_j\, \dot{\phi}^j_x$ es un homeomorfismo diferenciable. Definiendo ahora $z_j : P = \sum_j a_j\, \dot{\phi}_x^j \to a_j$, entonces (x_i, z_j) es un sistema de coordenadas locales de B sobre $\pi^{-1}(U)$ siendo las z_j lineales sobre las fibras.

Sea ahora $\bar{\varrho}_U : U \times R^{n+m.n} \to \bar{\pi}^{-1}(U) \subset \overline{B}$ la biyección, construida a partir de las x_i y ϕ^j, que se consideró para definir $\overline{B} \xrightarrow{\bar{\pi}} V$. Definiendo $\bar{z}_j(\overline{P}) = a_j$ y $p_{ij}(\overline{P}) = b_{ij}$, donde

$$\overline{P} = \sum_j a_j\, \overline{\phi}^j_x + \sum_{ij} b_{ij}\, (dx_i)_x\, \overline{\phi}^j_x$$

(*) Suponemos en este enunciado que las funciones de V están inyectadas en las de B por la aplicación π^*transpuesta de π y, análogamente, que las de B están inyectadas en la de $\overline{B}$ por p^*.

recorre $\bar{\pi}^{-1}(U)$, tendremos que $(x_i\ \bar{z}_j\ p_{ij})$ es un sistema de coordenadas locales de $\bar{B}$ sobre $\bar{\pi}^{-1}(U)$, siendo las $\bar{z}_j$ y p_{ij} lineales sobre las fibras. Ahora bien, por definición de la proyección p, se verifica $\bar{z}_j = z_j \cdot p$. Entonces, las funciones $(x_i\ z_j\ p_{ij})$ satisfacen las condiciones *a)* y *b)* del Teorema. Veamos que también verifican la condición *c)*. En efecto, por ser $p\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right) = \frac{\partial}{\partial z_j}$ y $p\left(\frac{\partial}{\partial p_{ij}}\right) = 0$ tendremos $\theta_j = \sum_i f_{ij}\, dx_i + dz_j$. Por otra parte, puesto que la inyección $i_{\bar{P}}$ correspondiente a un punto $\bar{P} \in \bar{\pi}^{-1}(U)$ tal que $p_{ij}(\bar{P}) = b_{ij}$, $p(\bar{P}) = P$ y $\bar{\pi}(\bar{P}) = x$, viene definida por el sistema de ecuaciones: $i_{\bar{P}}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_x =$ $= \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_P + \sum_j b_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)_P$, entonces $f_{ij} = -p_{ij}$.

c.q.d.

A los sistemas de coordenadas locales $(x_i\ z_j\ p_{ij})$ de este tipo los llamaremos en lo que sigue *canónicos*.

1.2 *Cálculo tensorial con valores en un módulo*

Sea $A_{\bar{B}}$ el álgebra de las funciones diferenciables de $\bar{B}$ y $M_{\bar{B}}$ el conjunto de todas las aplicaciones diferenciables F, de $\bar{B}$ en B, tales que $\pi . F = \bar{\pi}$. $M_{\bar{B}}$ es un $A_{\bar{B}}$-módulo respecto de las operaciones $(F_1 + F_2) : \bar{P} \in \bar{B} \to F_1(\bar{P}) + F_2(\bar{P})$ y $(fF_1) : \bar{P} \in \bar{B} \to f(\bar{P}) . F_1(\bar{P})$, donde F_1, $F_2 \in M_{\bar{B}}$, $f \in A_{\bar{B}}$ y donde las operaciones de los segundos miembros son las de la fibra de B que pasa por $p(\bar{P})$. Si $\{D\}$ y $\{\omega\}$ son los $A_{\bar{B}}$-módulos de las derivaciones y diferenciales de $\bar{B}$, respectivamente, podemos definir un tensor $T_p{}^q$ (p-covariante, q-contravariante) sobre $A_{\bar{B}}$, con valores en $M_{\bar{B}}$, como una aplicación $(p + q)$-lineal de $\{D\}^p \times \{\omega\}^q$ en $M_{\bar{B}}$. Por ejemplo, la 1-forma canónica θ de $\bar{B}$ nos define un tensor 1-covariante de este tipo como sigue. Sea τ la aplicación que asigna a cada vector D_p, tangente en $P \in B$ a la fibra E_p de B que pasa por P, el punto único $\tau(D_p) \in E_p$ tal que $f(\tau(D_p)) = D_p f$ para toda función diferenciable f de B lineal sobre las fibras. Definiendo ahora, para cada $D \in \{D\}$, la aplicación $\theta(D) : \bar{P} \in \bar{B} \to \tau .\ \theta_{\bar{P}}(D_{\bar{P}})$, puede comprobarse entonces que la aplicación $\theta : D \in \{D\} \to \theta(D)$ es un tensor 1-covariante del tipo que se busca.

Para este tipo más general de tensores puede desarrollarse un cálculo tensorial esencialmente análogo al ordinario según vamos a ver en esta sección (para más detalles consúltese [3], Ch. 1).

Sea K un cuerpo conmutativo, A un álgebra conmutativa y asociativa sobre K con elemento unidad y M un A-módulo. Sea $\{D\}$ el A-módulo de las derivaciones de A y $\{\omega\}$ su A-módulo dual (el caso que nos interesa en este trabajo es para $K = R$, $A = A_{\overline{B}}$ y $M = M_{\overline{B}}$).

DEFINICIÓN 3

Un tensor $T_p{}^q$ (p-covariante, q-contravariante) sobre A con valores en M es una aplicación $(p + q)$-lineal de $\{D\}^p \times \{\omega\}^q$ en M.

Igual que en el caso ordinario, el conjunto de todos los tensores $\{T_p{}^q\}$ de un mismo tipo (esto es, para p y q fijos) es un A-módulo respecto de las operaciones naturales de suma de tensores y de producto de un tensor por un escalar.

DEFINICIÓN 4

Sean M_1, M_2 y M_3 tres A-módulos con un producto bilineal $M_1 \times M_2 \to M_3$ que denotaremos por $(e, e') \to ee'$. Dados dos tensores $T_p{}^q$ y $T_r{}^s$ con valores en M_1 y M_2 respectivamente, llamaremos producto tensorial $T_p{}^q \otimes T_r{}^s$ al tensor con valores en M_3 siguiente:

$$T_p{}^q \otimes T_r{}^s (D_1 \ldots, D'_1 \ldots, \omega_1 \ldots, \omega'_1 \ldots) = T_p{}^q (D_1 \ldots, \omega_1 \ldots)\, T_r{}^s (D'_1 \ldots, \omega'_1 \ldots)$$

EJEMPLOS

a) Sea $M_1 = A$, $M_2 = M_3 = M$ y $A \times M \to M$ el producto definido por la estructura de módulo. Entonces resulta que el producto tensorial de un tensor ordinario por un tensor con valores en M es un tensor con valores en M.

b) Sea $M_1 = M$, $M_2 = M^*$ (módulo dual de M), $M_3 = A$ y $M \times M^* \to A$ la aplicación $(e, \omega) \to \omega(e)$. Entonces resulta que el producto tensorial de un tensor con valores en M por un tensor con valores en M^* es un tensor ordinario.

c) Sea $M_1 = \mathrm{Hom}_A(M, M)$, $M_2 = M_3 = M$ y $\mathrm{Hom}_A(M, M) \times M \to M$ la aplicación $(\tau, e) \to \tau(e)$. Entonces resulta que el producto tensorial de un tensor con valores en $\mathrm{Hom}_A(M, M)$ por un tensor con valores en M es un tensor con valores en M.

Estos tres ejemplos de producto tensorial, en el caso $M = M_{\overline{B}}$, serán muy utilizados en los próximos capítulos.

La noción de *derivación de* LIE sobre los tensores con valores en un módulo puede introducirse de un modo natural cuando, en dicho módulo, tenemos previamente definida lo que vamos a llamar una *ley de derivación.*

DEFINICIÓN 5

Una ley de derivación en un A-módulo M es una aplicación ∇ : $D \in \{D\} \to \nabla_D \in \mathrm{Hom}_K (M, M)$ tal que:

$$\nabla_{D_1+D_2} = \nabla_{D_1} + \nabla_{D_2}$$

$$\nabla_{aD_1} = a\, \nabla_{D_1}$$

$$\nabla_{D_1} (ae) = (D_1\, a)\, e + a\, \nabla_{D_1} e$$

donde $a \in A$, $e \in M$ y D_1, $D_2 \in \{D\}$.

Por ejemplo, si se considera A como A-módulo, entonces ∇ definida por $\nabla_D\, a = Da$ es una ley de derivación en A. A esta ley la llamaremos *derivación canónica* en A.

Vamos a ver ahora que conocida una ley de derivación podemos conocer todas las demás. En efecto, si ∇ y ∇' son dos de tales leyes, entonces $(\nabla_D - \nabla'_D)\ (ae) = a\, (\nabla_D - \nabla'_D)\, e$. De aquí, teniendo en cuenta que ∇, $\nabla' \in \mathrm{Hom}_A (\{D\}, \mathrm{Hom}_K (M, M))$, resulta que $\nabla - \nabla' \in \mathrm{Hom}_A (\{D\}, \mathrm{Hom}_A (M, M))$. Recíprocamente, si ∇ es una ley de derivación y h un elemento cualquiera de $\mathrm{Hom}_A (\{D\}, \mathrm{Hom}_A (M, M))$, entonces $\nabla' = \nabla + h$ es una ley de derivación.

La noción de derivación de LIE puede ser ahora introducida como sigue.

DEFINICIÓN 6

Sea ∇ una ley de derivación en el A-módulo M y $\{T_p{}^q\}$ el A-módulo de los tensores p-covariantes, q-contravariantes sobre A con valores en M. Llamaremos derivación de LIE en $\{T_p{}^q\}$ a la aplicación $L : D \in \{D\} \to L_D \in \mathrm{Hom}_K (\{T_p{}^q\}, \{T_p{}^q\})$, definida por

$$(L_D\, T_p{}^q)\, (D_1 \dots D_p,\ \omega_1 \dots \omega_q) = \nabla_D\, T_p{}^q\, (D_1 \dots D_p,\ \omega_1 \dots \omega_q) -$$

$$- \sum_{i=1}^{p} T_p{}^q (D_1 \dots [D, D_i] \dots D_p, \omega_1 \dots \omega_q) -$$

$$- \sum_{i=1}^{q} T_p{}^q (D_1 \dots D_p, \omega_1 \dots L_D \omega_i \dots \omega_q)$$

Al tensor $L_D T_p{}^q$ lo llamaremos derivada de LIE de $T_p{}^q$ respecto de D.

La derivación de LIE verifica las siguientes propiedades:

$$L_D (T + T') = L_D T + L_D T'$$

$$L_D (a T) = (D a)T + a L_D T$$

$$L_{D+D'} (T) = L_D T + L_{D'} T$$

$$L_{\lambda D} (T) = \lambda L_D T$$

donde

$$D, D' \in \{D\}, \quad T, T' \in \{T_p{}^q\} \text{ y } \lambda \in K$$

Vamos a ver ahora la relación que existe entre la derivación de LIE y el producto tensorial.

Sean M_1, M_2 y M_3 tres A-módulos con un producto bilineal $M_1 \times M_2 \to M_3$ y ∇^1, ∇^2 y ∇^3 tres leyes de derivación en M_1, M_2 y M_3 respectivamente. Diremos que el producto es *compatible* con las leyes de derivación si:

$$\nabla^3{}_D (ee') = (\nabla^1{}_D e)e' + e (\nabla^2{}_D e'), \text{ para } D \in \{D\}, e \in M_1 \text{ y } e' \in M_2.$$

Por ejemplo, si en A definimos la ley de derivación canónica, en M^* la ley de derivación

$$(\nabla_D \omega) (e) = D(\omega (e)) - \omega (\nabla_D e) \; (\omega \in M^* \text{ y } e \in M)$$

y en $\mathrm{Hom}_A (M, M)$ la ley de derivación

$$(\nabla_D \tau) (e) = \nabla_D \tau (e) - \tau (\nabla_D e) \; (\tau \in \mathrm{Hom}_A (M, M) \text{ y } e \in M),$$

entonces los tres productos bilineales $A \times M \to M$, $M \times M^* \to A$ y $\mathrm{Hom}_A (M, M) \times M \to M$, considerados anteriormente, son compatibles con las correspondientes leyes de derivación.

Si ahora $T_p{}^q$ y $T_r{}^s$ son dos tensores cualquiera con valores en M_1 y M_2 respectivamente, y suponemos que el producto $M_1 \times M_2 \to M_3$ es compatible con las leyes de derivación ∇^1, ∇^2 y ∇^3, entonces, para toda $D \in \{D\}$, se verifica:

$$L_D\ (T_p{}^q \otimes T_r{}^s) = L_D\, T_p{}^q \otimes T_r{}^s + T_p{}^q \otimes L_D\, T_r{}^s$$

Vamos a tratar ahora, siguiendo el mismo método, las formas diferenciales.

DEFINICIÓN 7

Una p-forma ω_p sobre A con valores en M es un tensor p-covariante alternado, esto es, si s es una permutación cualquiera de $(1 \ldots p)$ en $(s_1 \ldots s_p)$ entonces $\omega_p\ (D_{s_1} \ldots D_{s_p}) =$ (signo de s) $\omega_p\ (D_1 \ldots D_p)$.

A los elementos de M los llamaremos, por extensión, o-formas. El conjunto $\{\omega_p\}$ de todas las p-formas es un submódulo del A-módulo $\{T_p\}$ de los tensores p-covariantes.

DEFINICIÓN 8

Sean M_1, M_2 y M_3 tres A-módulos con un producto bilineal $M_1 \times M_2 \to M_3$. Dadas dos formas ω_p y ω_q con valores en M_1 y M_2 respectivamente, llamaremos producto exterior $\omega_p \wedge \omega_q$ a la forma con valores en M_3 siguiente:

$$(\omega_p \wedge \omega_q)\ (D_1 \ldots D_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!}\ \Sigma\ (\text{signo de } s_{jk})\ \omega_p\ (D_{j_1} \ldots D_{j_p})$$

$$\omega_q\ (D_{k_1} \ldots D_{k_q})$$

(donde la suma se toma sobre todas las posibles particiones de $(1 \ldots p + q)$ en $(j_1 \ldots j_p)$ y $(k_1 \ldots k_q)$, y s_{jk} es la permutación $(1 \ldots p + q) \to (j_1 \ldots j_p\ k_1 \ldots k_q)$).

Por ejemplo, respecto de los productos bilineales $A \times M \to M$, $M \times M^* \to A$ y $\mathrm{Hom}_A\ (M, M) \times M \to M$ ya considerados otras veces, tenemos correspondientes nociones de producto exterior.

De la definición dada de derivada de Lie de un tensor se sigue inmediatamente que la derivada de Lie $L_D\,\omega$ de una forma ω es también una forma y que, dados tres módulos M_1, M_2, M_3 con leyes de derivación y un producto bilineal compatible, entonces, si ω_p y ω_q son formas con valores en M_1 y M_2 respectivamente, se verifica:

$$L_D (\omega_p \wedge \omega_q) = L_D \, \omega_p \wedge \omega_q + \omega_p \wedge L_D \, \omega_q$$

Sobre las formas con valores en un módulo podemos introducir las nociones de *producto interior y diferenciación exterior* como en el caso ordinario.

Para cada $D \in \{D\}$, llamaremos *producto interior* i_D sobre el A-módulo $\{\omega_p\}$ al homomorfismo de $\{\omega_p\}$ en $\{\omega_{p-1}\}$ definido por $(i_D \, \omega_p) \, (D_1 \dots D_{p-1}) = p \, \omega_p \, (DD_1 \dots D_{p-1})$, para $p > 0$ e $i_D \, \omega_0 = 0$.

El producto interior verifica las siguientes propiedades:

$$i_{D+D'} = i_D + i_{D'}$$

$$i_{aD} = a i_D$$

$$L_D \, . \, i_{D'} - i_{D'} \, . \, L_D = i_{[D,D']}$$

$$i^2_D = 0$$

donde

$$a \in A \text{ y } D, D \in \{D\}$$

Dados tres módulos M_1, M_2, M_3 con leyes de derivación y un producto bilineal compatible, entonces, si ω_p y ω_q son formas con valores en M_1 y M_2 respectivamente, se verifica:

$$i_D (\omega_p \wedge \omega_q) = (i_D \, \omega_p) \wedge \omega_q + (-1)^p \, \omega_p \wedge i_D \, \omega_q$$

Llamaremos *diferenciación exterior* sobre el A-módulo $\{\omega_p\}$ a la aplicación K-lineal $d : \{\omega_p\} \to \{\omega_{p+1}\}$ definida por:

$$(d\omega_p) \, (D_0 \dots D_p) = \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \, \nabla_{D_i} (\omega_p \, (D_0 \dots \hat{D}_i \dots D_p)) +$$

$$+ \frac{1}{p+1} \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \, \omega_p \, ([D_i, D_j] \, D_0 \dots \hat{D}_i \, .. \, \hat{D}_j \dots D_p)$$

donde el signo $\wedge$ significa que se omite el término correspondiente.

Dados tres módulos M_1, M_2, M_3 con leyes de derivación y un producto bilineal compatible, entonces, si ω_p y ω_q son formas con valores en M_1 y M_2 respectivamente, se verifica:

$$d(\omega_p \wedge \omega_q) = (d\omega_p) \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge d\omega_q$$

Las nociones de producto interior, diferenciación exterior y derivación de LIE están relacionadas por la importante fórmula:

$$L_D = i_D d + d i_D$$

Según es bien sabido, la diferenciación exterior en el álgebra de las formas diferenciales ordinarias sobre una variedad verifica $d^2 = 0$. Para las formas con valores en un módulo esto deja de ser cierto en general. Por ejemplo, dada una o-forma ω_0, tendremos:

$$d^2 \omega_0 (D, D') = \nabla_D (d\omega_0)(D') - \nabla_{D'} (d\omega_0)(D) - (d\omega_0)([D, D']) =$$

$$= \nabla_D \nabla_{D'} \omega_0 - \nabla_{D'} \nabla_D \omega_0 - \nabla_{[D,D']} \omega_0 \neq 0$$

Llamando $K(D, D') = \nabla_D \nabla_{D'} - \nabla_{D'} \nabla_D - \Delta_{[D,D']}$, se comprueba inmediatamente que $K(D, D')$ es un A-endomorfismo de M. Por otra parte, se verifica:

$$K(D, D') = K(D', D)$$

$$K(D + D', D'') = K(D, D'') + K(D' D'')$$

$$K(aD, D') = aK(D, D')$$

Entonces K es una 2-forma sobre A con valores en el A-módulo: $\mathrm{Hom}_A(M, M)$.

DEFINICIÓN 9

A la 2-forma K la llamaremos *forma de curvatura* de la ley de derivación ∇.

En el caso particular de ser $M = A$ y ∇ la ley de derivación canónica, entonces resulta:

$$K(D, D')a = DD'a - D' Da - [D, D'] a = 0$$

Los siguientes resultados (cuya demostración puede verse en [3] Ch. 1) son de mucha importancia en las aplicaciones.

$$L_D\, L_{D'}\, \omega - L_{D'}\, L_D\, \omega = L_{[D,D']}\, \omega + K\,(D, D')\, \omega$$

$$L_D\, d\omega - dL_D\, \omega = (i_D\, K) \wedge \omega$$

$$d^2\, \omega = K \wedge \omega,\ dK = 0$$

(el producto exterior $\wedge$ que aparece es el correspondiente al producto bilineal $\mathrm{Hom}_A\,(M, M) \times M \to M$ otras veces citado).

Para terminar este estudio sobre formas con valores en un módulo vamos a analizar las relaciones entre las derivaciones de LIE, diferenciaciones exteriores, etc., correspondientes a dos leyes de derivación sobre el mismo módulo.

Según ya hemos visto, si ∇ y ∇' son dos leyes de derivación en el A-módulo M, entonces existe un $h \in \mathrm{Hom}_A\,(\{D\}, \mathrm{Hom}_A\,(M, M))$ tal que $\nabla' = \nabla + h$. Denotando la derivación de LIE, diferenciación exterior, etc., correspondientes a ∇' por L', d', etc., se tienen las siguientes relaciones:

$$L'_D\, \omega = L_D\, \omega + h\,(D)\, \omega$$

$$d'\omega = d\omega + h \wedge \omega$$

$$K' = K + h \wedge h + dh$$

(el producto exterior $\wedge$ que aparece es el correspondiente al producto bilineal $\mathrm{Hom}_A\,(M, M) \times \mathrm{Hom}_A\,(M, M) \to \mathrm{Hom}_A\,(M, M)$ definido por el producto usual de A-endomorfismos).

Como ya dijimos al comienzo de esta sección nos interesa aplicar lo desarrollado aquí al caso particular en que A es el álgebra $A_{\overline{B}}$ de las funciones diferenciables de $\overline{B}$ y M es el $A_{\overline{B}}$ - módulo $M_{\overline{B}}$ de las aplicaciones diferenciables F, de $\overline{B}$ en B, tales que $\pi.\ F = \overline{\pi}$. Vamos a ver ahora como, en este caso, podemos expresar todos los resultados obtenidos en términos de coordenadas locales.

Si $\phi^1 \ldots \phi^n$ son n secciones de B, definidas en un abierto $U \subset V$ y tales que, para todo abierto $U' \subset U$, $\phi^1{}_{U'} \ldots \phi^n{}_{U'}$ es una base de $M_{U'}$ sobre $A_{U'}$, entonces las n aplicaciones $F_j = \phi^j.\ \overline{\pi}$ $(j = 1 \ldots n)$ definen una base de $\overline{M} = (M_{\overline{B}})_{\overline{\pi}^{-1}(U)}$ sobre $\overline{A} = (A_{\overline{B}})_{\overline{\pi}^{-1}(U)}$. Entonces, todo elemento $F \in \overline{M}$ viene definido por una combinación lineal $F = \sum_j f_j\, F_j$ donde $f_j \in \overline{A}$, todo tensor $T_p{}^q$ con valores en $\overline{M}$ viene definido por $T_p{}^q = \sum_j T_j\,.\ F_j$ donde los T_j, son tensores ordinarios y el producto se toma respecto del producto bilineal $\overline{A} \times \overline{M} \to \overline{M}$

definido por la estructura de módulo y toda forma ω_p con valores en $\overline{M}$ viene definida por $\omega_p = \sum_j \omega_j \, . \, F_j$ donde las ω_j son formas ordinarias y el producto se toma en el sentido anterior.

Por ejemplo, si en $\overline{\pi}^{-1}(U)$ tenemos un sistema de coordenadas locales canónicas $(x_i \; z_j \; p_{ij})$ tal que, las secciones $\phi^1 \ldots \phi^n$ que intervienen en su definición son, precisamente, las que definen las aplicaciones F_j (en lo que sigue expresaremos brevemente esto diciendo que (F_j) es la base de $\overline{M}$ inducida por $(x_i \; z_j \; p_{ij})$), entonces la 1-forma canónica θ de $\overline{B}$ toma la expresión:

$$\theta = \sum_j \theta_j \, . \, F_j$$

donde las 1-formas ordinarias θ_j son $\theta_j = dz_j - \sum_i p_{ij} \, dx_i$.

Sea ahora ∇ una ley de derivación en $\overline{M}$ y (D_i) una base del $\overline{A}$-módulo de las derivaciones de $\overline{A}$. Sea:

$$\nabla_{D^i} F_j = \sum_h \Gamma^h{}_{ij} \, F_h \, , \quad \Gamma^h{}_{ij} \in \overline{A}$$

Entonces, las funciones $\Gamma^h{}_{ij}$ determinan completamente la ley de derivación. Recíprocamente, dadas $\Gamma^h{}_{ij} \in \overline{A}$, definiendo $\nabla_{D^i} F$ para $F = \sum_j f_j \, F_j$ por la fórmula:

$$\nabla_{D^i} F = \sum_j (D_i f_j) \, F_j + \sum_{jh} f_j \, \Gamma^h{}_{ij} \, F_h$$

y extendiendo ∇ a $\{D\}$ por linealidad, obtenemos una ley de derivación.

A partir de estas observaciones y aplicando las reglas del cálculo tensorial, podemos hallar fácilmente las expresiones en coordenadas locales de todos los resultados obtenidos.

Si sobre el fibrado B tenemos una conexión podemos definir una ley de derivación ∇ en el $A_{\overline{B}}$-módulo $M_{\overline{B}}$, a partir de la conexión, procediendo como sigue. Sea D_p un vector tangente a $\overline{B}$ en un punto $p \in \overline{B}$ y F un elemento de $M_{\overline{B}}$. Llamaremos derivada $D_p \, F$ de F respecto de D_p al elemento único de la fibra E_x de B $(x = \overline{\pi}(p))$ tal que, para toda función diferenciable f de B, lineal sobre las fibras, se verifica la condición:

$$f(D_p \, F) = D_p \, (f \cdot F) - (\nabla_{D_x} \varphi_f{}^*) \, F(P)$$

donde $\varphi_f{}^*$ es la sección transversal del fibrado B^* dual de B definida por la condición $\varphi_f{}^*(x)(P) = f(P)$ $(P \in B,\ x = \pi(P))$ y donde ∇ es la derivación covariante definida por la conexión. A partir de este concepto podemos definir ahora una ley de derivación ∇ en el $A_{\overline{B}}$-módulo $M_{\overline{B}}$ por la fórmula $(\nabla_D F)(p) = D_p F$. En términos de un sistema de coordenadas locales canónicas $(x_i\ z_j\ p_{ij})$ esta ley de derivación viene definida por $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} F_j = \sum\limits_h \Gamma^h{}_{ij} F_h$ y $\nabla_{\frac{\partial}{\partial z_j}} F_k = \nabla_{\frac{\partial}{ij}} F_k = 0$, donde las $\Gamma^h{}_{ij}$ son los símbolos de CHRISTOFFEL de la conexión. En todo lo que sigue, siempre que hablemos de una ley de derivación en el $A_{\overline{B}}$-módulo $M_{\overline{B}}$ nos referiremos a este tipo especial de ley de derivación definida por una conexión de B.

Para terminar, vamos a introducir una nueva noción de *producto interior* que utilizaremos mucho en lo que sigue:

Sean M_1, M_2, M_3 tres $A_{\overline{B}}$-módulos (de los $A_{\overline{B}}$, $M_{\overline{B}}$, $M^*_{\overline{B}}$ y $\mathrm{Hom}_{A_{\overline{B}}}(M_{\overline{B}}, M_{\overline{B}})$) con un producto bilineal $M_1 \times M_2 \to M_3$ y D y ω_p un tensor 1-contravariante y una p-forma con valores en M_1 y M_2, respectivamente. Dado un abierto $U \subset \overline{B}$ con coordenadas locales (x_i), sea (D_i) la base inducida en el $(A_{\overline{B}})_U$-módulo de las derivaciones de $(A_{\overline{B}})_U$ y (ω_i) la base dual correspondiente. Llamaremos producto interior $(i_D\,\omega_p)_U$ a la $(p-1)$-forma sobre $(A_{\overline{B}})_U$ con valores en $(M_3)_U$ definida por la fórmula:

$$(i_D\,\omega_p)_U\,(\overline{D}_1 \dots \overline{D}_{p-1}) = p \sum_i D(\omega_i)\,\omega_p\,(D_i, \overline{D}_1 \dots \overline{D}_{p-1})$$

para $p > 0$, e $(i_D\,\omega_0)_U = 0$. Se demuestra fácilmente que $(i_D\,\omega_p)_U$ es independiente del sistema de coordenadas locales (x_i) escogido. Pues bien, llamaremos ahora producto interior $i_D\,\omega_p$ a la $(p-1)$-forma sobre $A_{\overline{B}}$ con valores en M_3, única, tal que, para todo $U \subset \overline{B}$ del tipo anterior, su restricción a U coincide con $(i_D\,\omega_p)_U$.

Las propiedades de este nuevo producto interior son las mismas que las de los hasta ahora considerados con los naturales cambios. Así por ejemplo, la aplicación $i_D : \{\omega_p\} \to \{\omega_{p-1}\}$ es un homomorfismo del $A_{\overline{B}}$-módulo de las p-formas con valores en M_2 en el $A_{\overline{B}}$-módulo de las $(p-1)$-formas con valores en M_3.

1.3 *Transformaciones infinitesimales de contacto generalizadas*

DEFINICIÓN 10

Diremos que un campo vectorial $\overline{D}$ sobre $\overline{B}$ es una transformación infinitesimal de contacto generalizada (abreviadamente t.i.c.g.)

cuando, *para toda* ley de derivación en el $A_{\overline{B}}$ -módulo $M_{\overline{B}}$, se verifica $L_{\overline{D}}\,\theta = f\theta$, donde $f \in \mathrm{Hom}_{A_{\overline{B}}}(M_{\overline{B}}, M_{\overline{B}})$.

LEMA 2

Un campo vectorial $\overline{D}$ sobre $\overline{B}$ es una t.i.c.g. si se verifica: $L_{\overline{D}}\,\theta = f\theta$, $f \in \mathrm{Hom}_{A_{\overline{B}}}(M_{\overline{B}}, M_{\overline{B}})$, *para una* ley de derivación en $M_{\overline{B}}$.

DEMOSTRACIÓN

Basta observar que si $L'_{\overline{D}}$ es la derivación de LIE, respecto de $\overline{D}$, correspondiente a otra ley de derivación en $M_{\overline{B}}$, entonces se verifica $L'_{\overline{D}} = L_{\overline{D}} + h_{\overline{D}}$, siendo $h_{\overline{D}} \in \mathrm{Hom}_{A_{\overline{B}}}(M_{\overline{B}}, M_{\overline{B}})$.

c.q.d.

El siguiente teorema constituye, para los campos vectoriales sobre B, lo análogo al Teorema 1 para las secciones transversales.

TEOREMA 3

Para cada campo vectorial D del fibrado $B \xrightarrow{\pi} V$, existe una y sólo una t.i.c.g. $\overline{D}$ tal que $p(\overline{D}) = D$.

DEMOSTRACIÓN

Bastará probar que, respecto de una ley de derivación en $M_{\overline{B}}$, el sistema de ecuaciones $L_{\overline{D}}\,\theta = f\theta$, $p(\overline{D}) = D$, en las incógnitas $\overline{D}$ y f, tiene una solución única sobre $p^{-1}(U)$, donde U es el abierto de B sobre el que está definido el campo vectorial D.

Sea U' un abierto de $p^{-1}(U)$ con coordenadas locales canónicas $(x_i\, z_j\, p_{ij})$ y (F_j) la base inducida en $(M_{\overline{B}})_{U'}$ por dichas coordenadas. Tendremos:

$$L_{\overline{D}}\,\theta = L_{\overline{D}} \sum_j \theta_j . F_j = \sum_i (L_{\overline{D}}\,\theta_j . F_j + \theta_j . L_{\overline{D}}\, F_j) = \sum_i (L_{\overline{D}}\,\theta_j + \\ + \sum_h a_{jh}\,\theta_h) . F_j$$

Según esto, la condición $L_{\overline{D}}\,\theta = f\theta$ implica que se verifique $L_{\overline{D}}\,\theta_j = \sum_h b_{jh}\,\theta_h$, donde $b_{jh} \in (A_{\overline{B}})_{U'}$. Por otra parte, la condición $p(D) = D$ implica que, para toda función diferenciable $f(x_i\, z_j)$, se verifique $\overline{D} f(x_i, z_j) = D f(x_i\ z_j)$. A partir de aquí, teniendo en cuenta que $\theta_j = dz_j - \sum_i p_{ij}\, dx_i$, resulta

$$b_{jh} = \frac{\partial D z_j}{\partial z_h} - \sum_i p_{ij} \frac{\partial D x_i}{\partial z_h} \text{ y } \overline{D} p_{ij} = - \sum_k p_{kj} \frac{\partial D x_k}{\partial x_i} + \frac{\partial D z_j}{\partial x_i} + \sum_h b_{jh}\, p_{ih}$$

Esto demuestra que, sobre U', existe una solución única $(\overline{D}_{U'}, f_{U'})$ del sistema de ecuaciones $L_{\overline{D}}\, \theta = f\, \theta$, $p(\overline{D}) = D$.

Sean ahora $\overline{D}$ y f el campo vectorial y el homomorfismo únicos tales que, para todo $U' \subset p^{-1}(U)$ del tipo anterior, sus restricciones a U', coincidan con $\overline{D}_{U'}$ y f_U' respectivamente. Entonces $(\overline{D}, f)$ es la solución única, sobre $p^{-1}(U)$, del sistema de ecuaciones considerado.

c.q.d.

A $\overline{D}$ la llamaremos *subida canónica* de D a $\overline{B}$.

De especial importancia son las subidas canónicas de los campos vectoriales de B que se proyectan por π en la derivación nula de V, a estas t.i.c.g. las llamaremos *verticales*.

2

FORMULACIÓN VARIACIONAL GLOBAL DE LA TEORÍA CLÁSICA DE CAMPOS

2.1 *El problema variacional en la teoría de campos*

La noción de *campo*, en el sentido de sistema físico definido por una cierta lagrangiana, puede ser formalizada desde un punto de vista global del modo siguiente.

Sea V una variedad de dimensión m dotada de una m-forma ω, distinta de cero en todos los puntos de V, que en lo que sigue llamaremos *elemento de volumen* de V.

DEFINICIÓN 1

Un campo sobre V es una pareja de un fibrado vectorial $B \xrightarrow{\pi} V$ sobre V y una función diferenciable $\mathcal{L}$ del fibrado $\overline{B} \xrightarrow{\overline{\pi}} V$ de las aproximaciones tangente de las secciones de B. A V, B, $\overline{B}$ y $\mathcal{L}$ los llamaremos, *espacio base, espacio de configuración, espacio de los estados* y *lagrangiana* del campo, respectivamente.

A partir de esta noción podemos plantear un *problema variacional* como sigue.

El elemento de volumen ω de V puede inyectarse por $\overline{\pi}^*$ (inyección transpuesta de la proyección $\overline{\pi}$) en el álgebra de las formas diferenciales de $\overline{B}$. Entonces tiene sentido considerar sobre $\overline{B}$ la m-forma $\mathcal{L}\,\omega$. Esto nos permite definir sobre el conjunto $\{\phi\}$ de las secciones transversales de B una función real L por la fórmula:

$$L(\phi) = \int_{\overline{\phi}} \mathcal{L}\,\omega, \; \phi \in \{\phi\}$$

donde $\overline{\phi}$ es *la subida canónica* de ϕ a $\overline{B}$ y donde se supone que ϕ es tal que la integral existe (*).

Si ahora D es un campo vectorial sobre B, podemos introducir la

(*) La integral se extiende a la imagen de $\overline{\phi}$ Emplearemos la misma notación para expresar $\overline{\phi}$ y su imagen por simplificar.

noción de derivada DL de la función L respecto del campo D, como la función real sobre $\{\phi\}$ definida por la fórmula:

$$(DL)(\phi) = \int_{\phi} L_{\overline{D}} (\mathcal{L}\, \omega), \ \phi \in \{\phi\}$$

donde $\overline{D}$ es *la subida canónica* de D a $\overline{B}$ y donde se supone que D y ϕ son tales que la integral existe.

De especial importancia es el caso particular en que el campo D es a soporte compacto. En este caso $(DL)(\phi)$ existe siempre para toda $\phi \in \{\phi\}$.

Podemos introducir, ahora, una noción de *estacionaridad* como sigue.

Para cada $\phi \in \{\phi\}$ sea ω_ϕ la funcional lineal $D \in \{D\} \to (DL)(\phi)$ sobre el espacio vectorial $\{D\}$ de los campos de B a soporte compacto.

DEFINICIÓN 2

Diremos que una sección transversal ϕ del fibrado B es estacionaria cuando $\omega_\phi = 0$.

El problema fundamental es ahora, caracterizar por medio de algún tipo de ecuaciones (globales) las secciones estacionarias.

Los elementos básicos a partir de los cuales vamos a obtener tales ecuaciones son una o-forma F y una $(m\text{-}1)$-forma Ω sobre $A_{\overline{B}}$, con valores en $M^*_{\overline{B}}$, definidas del modo siguiente.

TEOREMA 1

Dada una ley de derivación ∇ en el $A_{\overline{B}}$-módulo $M_{\overline{B}}$, existen una o-forma F y una $(m\text{-}1)$-forma Ω sobre $A_{\overline{B}}$ con valores en $M^*_{\overline{B}}$, únicas, tales que:

$$a) \quad i_X\, \omega = \Omega$$

$$b) \quad i_X\, d\,\theta + d\,\mathcal{L} = F\theta$$

(donde X es un tensor 1-contravariante sobre $A_{\overline{B}}$ con valores en $M^*_{\overline{B}}$, donde la diferenciación exterior se toma respecto de la ley de derivación dada y donde los productos de *a)* y *b)* se toman respecto de los productos bilineales $M^*_{\overline{B}} \times A_{\overline{B}} \to M^*_{\overline{B}}$ y $M^*_{\overline{B}} \times M_{\overline{B}} \to A_{\overline{B}}$, definidos por la estructura de módulo y por la noción de dualidad, respectivamente).

Demostración

Sea U un abierto cualquiera de $\overline{B}$ con coordenadas locales canónicas $(x_i\, z_j\, p_{ij})$. Sea (F_j) la base inducida en $(M_{\overline{B}})_U$ por dichas coordenadas y $(F_j{}^*)$ su correspondiente base dual. La restricción a U de $d\,\theta$ será:

$$d\,\theta = d \sum_j \theta_j\, F_j = \sum_j d\,(\theta_j\, F_j) = \sum_j (d\,\theta_j\, F_j - \theta_j \wedge d\,F_j) = \sum_j d\,\theta_j\, F_j -$$

$$- \sum_j \theta_j \wedge \sum_{hi} (\Gamma^h{}_{ij}\, d\,x_i)\, F_h = \sum_h (d\,\theta_h - \sum_{ij} \Gamma^h{}_{ij}\, \theta_j \wedge dx_i)\, F_h$$

donde las funciones $\Gamma^h{}_{ij}$ vienen definidas por $\nabla_{\frac{\partial}{\partial xi}} F_j = \sum_h \Gamma^h{}_{ij}\, F_h$ y donde hemos tenido en cuenta que, por la condición impuesta a ∇, se verifica $\nabla_{\frac{\partial}{\partial zj}} F_k = \nabla_{\frac{\partial}{\partial pij}} F_k = 0$.

Si $X_U = \sum_j X_j\, F_j{}^*$ es un tensor 1-contravariante sobre $(A_{\overline{B}})_U$ con valores en $(M^*_{\overline{B}})_U$, tendremos entonces:

$$i_{X_u}\, d\,\theta = \sum_h (i_{Xh}\, d\,\theta_h - \sum_{ij} \Gamma_{ij}{}^h\, [\theta_j\,(X_h)\, dx_i - (X_h\, x_i)\, \theta_j])$$

Por otra parte, si $F_U = \sum_j f_j\, F_j{}^*$ es un elemento de $(M^*_{\overline{B}})_U$, tendremos $F_U\, \theta = \sum_j f_j\, \theta_j$.

Sustituyendo ahora $i_{X_U}\, d\,\theta$ y $F_U\, \theta$ en *b*) y llamando $\Omega_U = i_{X_U}\, \omega$, obtenemos una expresión local, sobre U, del sistema de ecuaciones tensoriales *a*) y *b*) en las incógnitas X_U, F_U y Ω_U.

Aplicando ahora *b*) a los campos $\dfrac{\partial}{\partial p_{ij}}$ y $\dfrac{\partial}{\partial z_j}$, sucesivamente, se obtiene $dx_i\,(X_j) = -\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{ij}}$ y $f_j = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_j} - \sum_{hi} \Gamma^h{}_{ij} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{ih}}$. Por otra parte, aplicando, de nuevo, *b*) a los campos $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, se obtiene un sistema de ecuaciones compatible en las incógnitas restantes. De aquí se sigue, teniendo en cuenta que para determinar Ω_U sólo hace falta conocer $dx_i\,(X_j)$, que el sistema de ecuaciones *a*) y *b*) determina unívocamente F_U y Ω_U.

Si ahora llamamos F y Ω a las formas sobre $A_{\overline{B}}$ con valores en $M^*_{\overline{B}}$, únicas, tales que, para todo abierto U del tipo anterior, sus restricciones a U sean F_U y Ω_U respectivamente, entonces dichas formas son las únicas que satisfacen las condiciones del Teorema.

c.q.d.

OBSERVACIÓN

Por la construcción seguida, la (m-1)-forma Ω *no depende* de la ley de derivación ∇ dada en $M_{\overline{B}}$. Esta observación será fundamental en las próximas secciones.

2.2 *Fórmula fundamental de variación*

La fórmula que vamos a establecer a continuación constituirá el fundamento de las demostraciones de los más importantes teoremas de las próximas secciones.

TEOREMA 2 (*fórmula fundamental de variación*)

Sea ϕ una sección transversal y D un campo vectorial del fibrado B, $\overline{\phi}$ y $\overline{D}$ las subidas canónicas a $\overline{B}$ de ϕ y D, respectivamente, y F y Ω las formas diferenciales definidas por el Teorema 1. Entonces, sobre la imagen de $\overline{\phi}$, se verifica:

$$L_{\overline{D}}\,(\mathcal{L}\,\omega) = \theta\,(\overline{D})\,(d\,\Omega + F\,\omega) - d\,(\theta\,(\overline{D})\,\Omega - i_{\overline{D}}\,\mathcal{L}\,\omega)$$

(donde $d\,\Omega$ se toma respecto de la ley de derivación ∇ a partir de la que se definen F y Ω y donde los productos tensoriales se toman respecto del producto bilineal $M_{\overline{B}} \times M^*_{\overline{B}} \to A_{\overline{B}}$ definido por la noción de dualidad).

DEMOSTRACIÓN

Todas las derivaciones de LIE y diferenciaciones exteriores que hagamos a continuación se tomarán respecto de la ley de derivación ∇ a partir de la que se definen F y Ω.

Vamos a probar el Teorema, primeramente, para el caso en que $\pi\,(D) = 0$. Entonces $\overline{D}$ es una t.i.c.g. vertical y tendremos:

$$L_{\overline{D}}\,(\mathcal{L}\,\omega) = (\overline{D}\,\mathcal{L})\,\omega = (d\,\mathcal{L})\,\overline{D}\,\omega$$

Aplicando la b) del Teorema 1 al campo $\overline{D}$ tendremos:

$$(1) \qquad (i_X \, d\,\theta)\,\overline{D} + (d\,\mathcal{L})\,\overline{D} = (F\,\theta)\,\overline{D}$$

Por otra parte, puesto que $\overline{D}$ es una t.i.c.g., $L_{\overline{D}}\,\theta = i_{\overline{D}}\,d\,\theta + d\,i_{\overline{D}}\,\theta =$ $= A\theta$, y multiplicando interiormente por X tendremos:

$$(2) \qquad i_X\, i_{\overline{D}}\, d\,\theta + i_X\, d i_{\overline{D}}\,\theta = i_X\, A\theta$$

Sumando (1) y (2), teniendo en cuenta que por la definición dada de producto interior i_X se verifica $i_X\, i_{\overline{D}}\, d\,\theta = -\, i_{\overline{D}}\, i_X\, d\,\theta$, se sigue $(d\,\mathcal{L})\,\overline{D} = -\, i_X\, d i_{\overline{D}}\,\theta + (F\,\theta)\,\overline{D} + i_X\, A\,\theta$, y multiplicando por el elemento de volumen tendremos:

$$(3) \qquad L_{\overline{D}}\,(\mathcal{L}\,\omega) = -\,(i_X\, d\,\theta\,(\overline{D}))\,\omega + F\,\theta\,(\overline{D})\,\omega + (i_X\, A\,\theta)\,\omega$$

Del término $(i_X\, d\theta\,(\overline{D}))\,\omega$ podemos obtener otra expresión procediendo como sigue.

Multiplicando exteriormente por ω la igualdad $i_{\overline{D}}\,d\,\theta + d\,i_{\overline{D}}\,\theta =$ $= A\,\theta$, teniendo en cuenta que $i_{\overline{D}}\,d\,\theta \wedge \omega = 0$ por ser $\overline{D}$ vertical, se sigue $d\,\theta\,(\overline{D}) \wedge \omega = A\,\theta \wedge \omega$. Aplicando i_X a esta igualdad, teniendo en cuenta la a) del Teorema 1, obtendremos:

$$(i_X\, d\,\theta\,(\overline{D}))\,\omega - d\,\theta\,(\overline{D}) \wedge \Omega = i_X\,(A\,\theta \wedge \omega)$$

Aplicando ahora las fórmulas de la diferencial exterior y del producto interior i_X de un producto y sustituyendo en (3) resulta finalmente:

$$(4) \qquad L_{\overline{D}}\,(\mathcal{L}\,\omega) = \theta\,(\overline{D})\,(d\,\Omega + F\omega) - d\,(\theta\,(\overline{D})\,\Omega) + A\,\theta \wedge \Omega$$

Si se restringe (4) a la imagen de $\overline{\phi}$, el último término se anula por la definición de la subida canónica $\overline{\phi}$ de ϕ a $\overline{B}$. Esto prueba el Teorema para este caso.

Consideremos ahora el caso general en que $\pi\,(D) \neq 0$. Entonces tendremos:

$$L_{\overline{D}}\,(\mathcal{L}\,\omega) = (\overline{D}\,\mathcal{L})\,\omega + \mathcal{L}\,L_{\overline{D}}\,\omega$$

El campo D podemos descomponerlo en la suma $D = D_1 + D_2$ de dos campos D_1 y D_2 tales que: $\pi(D_1) = 0$ y D_2 restringible a la imagen de ϕ. Entonces, si $\overline{D_1}$ y $\overline{D_2}$ son las subidas canónicas a $\overline{B}$ de

D_1 y D_2, respectivamente, se verifica que $\overline{D} = \overline{D}_1 + \overline{D}_2$, $\overline{D}_1$ es una t.i.c.g. vertical y $\overline{D}_2$ es restringible a la imagen de $\overline{\phi}$. Entonces:

$$L_{\overline{D}}\,(\mathcal{L}\,\omega) = (\overline{D}_1\,\mathcal{L})\,\omega + (\overline{D}_2\,\mathcal{L})\,\omega + \mathcal{L}\,L_{\overline{D}_2}\,\omega$$

Aplicando a $\overline{D}_1$ el resultado (4), obtenido anteriormente, tendremos:

$$(\overline{D}_1\,\mathcal{L})\,\omega = \theta\,(\overline{D}_1)\,(d\,\Omega + F\,\omega) - d\,(\theta\,(\overline{D}_1)\,\Omega) + A_1\,\theta \wedge \Omega$$

Por otra parte, se verifica:

$$(\overline{D}_2\,\mathcal{L})\,\omega + \mathcal{L}\,L_{\overline{D}_2}\,\omega = L_{\overline{D}_2}\,(\mathcal{L}\,\omega) = i_{\overline{D}_2}\,d\,(\mathcal{L}\,\omega) + d i_{\overline{D}_2}\,\mathcal{L}\,\omega$$

Entonces queda finalmente:

$$L_{\overline{D}}\,(\mathcal{L}\,\omega) = \theta\,(\overline{D}_1)\,(d\,\Omega + F\,\omega) - d\,(\theta\,(\overline{D}_1)\,\Omega - i_{\overline{D}_2}\,\mathcal{L}\,\omega) +$$
$$+ A_1\,\theta \wedge \Omega + i_{\overline{D}_2}\,d\,(\mathcal{L}\,\omega)$$

Ahora bien, por ser $\overline{D}_1$ vertical se verifica $i_{\overline{D}_2}\,\mathcal{L}\,\omega = i_{\overline{D}}\,\mathcal{L}\,\omega$. Por otra parte, al restringir la fórmula anterior a la imagen de $\overline{\phi}$ tendremos, que $A_1\,\theta \wedge \Omega$ se anula por definición de $\overline{\phi}$, que $i_{\overline{D}_2}\,d\,(\mathcal{L}\,\omega)$ también se anula por ser $\overline{D}_2$ tangente a la imagen de $\overline{\phi}$, y que $\theta\,(\overline{D}_1) = \theta\,(\overline{D})$ por ser D_2 tangente a la imagen de ϕ. Esto prueba el Teorema en el caso general.

c.q.d.

2.3 *Ecuaciones de* EULER-LAGRANGE *y Teorema de* E. NOETHER *globales*

Consideremos la m-forma $d\,\Omega + F\,\omega$ sobre $A_{\overline{B}}$ con valores en $M^*_{\overline{B}}$ canónicamente definida a partir de la lagrangiana $\mathcal{L}$ del campo y de una ley de derivación ∇ en $M_{\overline{B}}$.

Las secciones estacionarias en el sentido de la Definición 2 pueden ser ahora caracterizadas como sigue.

TEOREMA 3 *(ecuaciones de* EULER-LAGRANGE *globales)*

Una condición necesaria y suficiente para que una sección transversal ϕ del fibrado B sea estacionaria es que se verifique:

$$(d\,\Omega + F\,\omega)_{\overline{\phi}} = 0$$

(donde $\overline{\phi}$ es la subida canónica de ϕ a $\overline{B}$).

DEMOSTRACIÓN

La condición es *necesaria*. En efecto, supongamos $\omega_\phi = 0$. Sea U un abierto arbitrario de $\overline{B}$ con coordenadas locales canónicas $(x_i\, z_j\, p_{ij})$, tal que $U \cap \operatorname{img} \overline{\phi} \neq \Phi$ (el vacio). Sea (F_j) la base inducida en $(M_{\overline{B}})_U$ por dichas coordenadas y $(F_j{}^*)$ su correspondiente base dual. Si $D_i = \overline{\phi}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ $(i = 1 \dots m)$, entonces $(d\,\Omega + F\,\omega)\,(D_1 \dots D_m) = \sum_j f_j\, F_j{}^*$, donde las f_j son funciones diferenciables sobre la subvariedad $U \cap \operatorname{img} \overline{\phi}$. Sea ahora C una cadena diferenciable m-dimensional de $\overline{\pi}\,(U)$, y D un campo vectorial arbitrario de B, de soporte compacto K, tal que, $p^{-1}\,(K) \cap \operatorname{img} \overline{\phi} \subset \overline{\phi}\,(C)$ y $p^{-1}\,(K) \cap \overline{\phi}\,(\partial C) = \Phi$. Aplicando la fórmula fundamental de variación tendremos:

$$0 = \omega_\phi\,(D) = \int_{\overline{\phi}} L_{\overline{D}}\,(\mathcal{L}\,\omega) = \int_{\overline{\phi}\,(C)} (\mathcal{L}\,\omega) =$$

$$= \int_{\overline{\phi}\,(C)} \theta\,(\overline{D})\,(d\,\Omega + F\,\omega) = \int_{\overline{\phi}\,(C)} \sum_j \theta_j\,(\overline{D})\,f_j\,\omega$$

Usando ahora la arbitrariedad de D y aplicando el Lema fundamental del Cálculo de variaciones clásico resulta $f_j = 0$ en el interior de $\overline{\phi}\,(C)$ y por tanto $(d\,\Omega + F\,\omega)_{int\,\overline{\phi}(C)} = 0$. Usando ahora la arbitrariedad de U resulta finalmente $(d\,\Omega + F\,\omega)_{\overline{\phi}} = 0$.

La condición es *suficiente*. En efecto, supongamos $(d\,\Omega + F\omega)_{\overline{\phi}} = 0$. Sea D un campo vectorial arbitrario de B de soporte compacto K. Sea C una cadena diferenciable m-dimensional de V tal que: $p^{-1}\,(K) \cap \operatorname{img} \overline{\phi} \subset \overline{\phi}(C)$ y $p^{-1}\,(K) \cap \overline{\phi}\,(\partial\, C) = \Phi$. Aplicando la fórmula fundamental de variación tendremos:

$$\omega_\phi\,(D) = \int_{\overline{\phi}} L_{\overline{D}}\,(\mathcal{L}\,\omega) = \int_{\overline{\phi}(C)} L_{\overline{D}}\,(\mathcal{L}\,\omega) = \int_{\overline{\phi}(C)} \theta\,(\overline{D})\,(d\,\Omega + F\,\omega) = 0$$

y usando ahora la arbitrariedad de D resulta $\omega_\phi = 0$.

c.q.d.

Si se halla la expresión de las ecuaciones globales obtenidas, en un sistema de coordenadas locales canónicas y respecto de una ley de derivación con simbolos de CHRISTOFFEL nulos, resultan las bien conocidas ecuaciones de EULER-LAGRANGE del Cálculo de variaciones clásico.

En efecto, sea U un abierto de $\overline{B}$ con coordenadas locales canónicas $(x_i\, z_j\, p_{ij})$, (F_j) la base inducida en $(M_{\overline{B}})_U$ por dichas coordenadas y (F_j^*) su correspondiente base dual. Un sencillo cálculo local nos proporciona $F = \sum_j f_j F_j^*$, $\Omega = \sum_j \Omega_j F_j^*$ y $d\Omega = \sum_j d\Omega_j F_j^*$, donde:

$$f_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_j}$$

$$\Omega_j = J \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{ij}} dx_1 \wedge \ldots \wedge \hat{d}x_i \wedge \ldots \wedge dx_m$$

(donde $J = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial}{\partial x_m}\right)$ y donde el signo $\wedge$ indica que se suprime el término que está debajo).

Si ϕ es ahora una sección transversal del fibrado B, definida sobre $\pi(U)$ por las ecuaciones $z_j = z_j(x_i)$, entonces la anulación de $d\Omega + F\omega$ sobre su subida canónica $\overline{\phi}$ (que viene definida por las ecuaciones $z_j = z_j(x_i)$, $p_{ij} = \frac{\partial z_j}{\partial x_i}$) equivale a la anulación sobre $\overline{\phi}$ de las m-formas ordinarias $d\Omega_j$

O sea:

$$p_{ij} = \frac{\partial z_j}{\partial x_j} \text{ y } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_j} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{ij}}\right) - \frac{1}{J}\sum_i \frac{\partial J}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{ij}} = 0$$

que son las ecuaciones de EULER-LAGRANGE del Cálculo de variaciones clásico para una densidad de volumen J variable.

Para terminar esta sección vamos a formular globalmente, la noción de problema variacional invariante por un grupo de LIE y a establecer el Teorema de E. NOETHER relativo a tales problemas invariantes.

Sea G un grupo de LIE que opera sobre el fibrado B por automorfismos de la estructura de fibrado vectorial. Todo elemento a de su álgebra de LIE A_G define entonces, del modo bien conocido, un campo vectorial D_a sobre B. Si $\overline{D}_a$ es la subida canónica de D_a a $\overline{B}$, tenemos entonces la inyección lineal $a \in A_G \rightarrow \overline{D}_a$ de A_G en el espacio de los campos vectoriales sobre $\overline{B}$.

DEFINICIÓN 3

Diremos que un campo de lagrangiana $\mathcal{L}$ es invariante por un grupo de LIE G, que opera sobre el fibrado B por automorfismos de fibrado vectorial, cuando, para todo elemento a de su álgebra de LIE A_G, existe una $(m\text{-}1)$-forma ω_a tal que $L_{\overline{D}_a}(\mathcal{L}\,\omega) = d\omega_a$.

Consideremos un campo invariante en el sentido de la definición anterior y sea τ_G la aplicación del álgebra de LIE A_G en el álgebra de las formas diferenciales sobre $\overline{B}$, definida por:

$$\tau_G : a \in A_G \to \theta(\overline{D}_a)\,\Omega - i_{\overline{D}_a}\,\mathcal{L}\,\omega - \omega_a$$

Aplicando ahora la fórmula fundamental de variación resulta inmediato el siguiente:

TEOREMA 4 *(de E. NOETHER global)*

Para toda sección transversal estacionaria ϕ del fibrado B y todo elemento a del álgebra de LIE A_G, se verifica $(d\tau_G(a))_{\overline{\phi}} = 0$. O lo que es equivalente, para toda cadena diferenciable C, de dimensión m, de V, se verifica:

$$\int_{\overline{\phi}(\partial C)} \tau_G(a) = 0$$

Los valores que toma la aplicación τ_G constituyen la versión global de los tan llamados *invariantes de* E. NOETHER del Cálculo de variaciones clásico.

OBSERVACIÓN

Puesto que la $(m\text{-}1)$-forma Ω sólo depende del campo dado (observación de la sección 2.1), los invariantes de E. NOETHER son nociones canónicamente asociadas al campo dado y al grupo de invarianza.

3

FORMULACION SIMPLECTICA GLOBAL DE LA TEORIA CLASICA DE CAMPOS

3.1 *Geometría simpléctica y dinámica analítica*

Supongamos que la variedad V es la recta real R, que interpretaremos como el dominio de la variable t del *tiempo*, y que el elemento de volumen ω de V es la 1-forma dt. Sea $B \xrightarrow{\pi} R$ un fibrado vectorial de dimensión n sobre R y $\mathcal{L}$ una función diferenciable real del fibrado $\overline{B} \xrightarrow{\overline{\pi}} R$ de las aproximaciones tangente de las secciones transversales de B.

Al campo sobre R (definición 1 del n.º 2) definido por la pareja $(B, \mathcal{L})$ lo llamaremos un *sistema dinámico* de espacio-tiempo de configuración B, espacio de estados $\overline{B}$ y lagrangiana $\mathcal{L}$.

Aplicando a este caso la teoría general del n.º 2 obtenemos una expresión intrínseca de la formulación lagrangiana de la dinámica analítica. Vamos a ver cómo se puede obtener, en este esquema, la formulación hamiltoniana.

Sea G un grupo uniparamétrico de automorfismos del fibrado $B \xrightarrow{\pi} R$ tal que, el grupo G_0 inducido por G sobre R coincide con el grupo uniparamétrico de las translaciones de la recta real R. Sea D_t el campo vectorial definido sobre B por el elemento del álgebra de LIE A_G de G que se proyecta por π en el campo vectorial canónico $\frac{\partial}{\partial t}$ de R y $\overline{D}_t$ la subida canónica de D_t a $\overline{B}$.

DEFINICIÓN 1

Diremos que un sistema dinámico $(B, \mathcal{L})$ es *conservativo* respecto del grupo G cuando se verifique que $L_{\overline{D}_t}(\mathcal{L}\, dt) = 0$. Al invariante de E. NOETHER correspondiente a $-D_t \in A_G$ lo llamaremos *hamiltoniana* del sistema y lo denotaremos por H.

En toda esta sección supondremos que el sistema dinámico considerado es conservativo en el sentido acabado de definir.

Dado un instante cualquiera $t \in R$, sea E^t la fibra $\overline{\pi}^{-1}(t)$ de $\overline{B}$ y H^t

y $\omega^t{}_2$ las restricciones respectivas a E^t de la hamiltoniana H y la 2-forma $\omega_2 = d\,\omega_1$ donde $\omega_1 = \theta\,\Omega - \mathcal{L}\,dt$.

DEFINICIÓN 2

Llamaremos *ecuaciones de* HAMILTON del sistema dinámico en un punto $P \in E^t$ a la pareja $(\tau_p, (dH^t)_p)$ de la aplicación lineal $\tau_p : D \in E^t{}_p \to i_D\,\omega^t{}_2 \in E^t{}_p{}^*$ y la diferencial $(dH^t)_p \in E^t{}_p{}^*$. Llamaremos *solución* dé dichas ecuaciones a todo vector $D \in E^t{}_p$ tal que $\tau_p(D) = -(dH^t)_p$.

En general, las ecuaciones de HAMILTON así definidas no tienen por qué ser compatibles para todo punto $P \in E^t$ (esto es, que exista un vector $D \in E^t{}_p$ tal que $\tau_p(D) = -(dH^t)_p$). Este hecho constituye el tan llamado problema de las *ligaduras secundarias* (en el sentido de BERGMANN-DIRAC) del sistema dinámico, al cual vamos a darle una solución intrínseca, procediendo como sigue.

Sea V_1 el conjunto de todos los puntos $P \in E^t$ en los cuales las ecuaciones de HAMILTON son compatibles y *supongamos* que V_1 es una subvariedad de E^t. Restringiendo H y ω_2 a V_1 podemos definir las ecuaciones de HAMILTON sobre V_1 igual a como se definieron sobre E^t por la Definición 2. Sea V_2 el conjunto de todos los puntos $P \in V_1$ en los cuales las ecuaciones de HAMILTON sobre V_1 son compatibles y *supongamos* que V_2 es una subvariedad de V_1. Restringiendo H y ω_2 a V_2 podemos definir las ecuaciones de HAMILTON sobre V_2 como anteriormente y continuar el mismo razonamiento. De este modo se obtiene una cadena (necesariamente finita) de subvariedades de E^t:

$$E^t \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq \ldots \supseteq V$$

Designando por H y ω_2 las restricciones a la subvariedad V de H^t y $\omega^t{}_2$ respectivamente, obtenemos la siguiente estructura: una variedad diferenciable V, una función diferenciable H de V y una 2-forma ω_2 de V *cerrada*. Sean $\{D\}$ y $\{\omega\}$ los conjuntos de los campos vectoriales y los campos de diferenciales de V, respectivamente.

DEFINICIÓN 3

Llamaremos *ecuaciones de* HAMILTON del sistema dinámico, sobre V, a la pareja (τ, dH) de la aplicación $\tau : D \in \{D\} \to i_D\,\omega_2 \in \{\omega\}$ y la 1-forma $dH \in \{\omega\}$. Llamaremos *solución* de dichas ecuaciones a todo campo vectorial D tal que $\tau(D) = -dH$.

De la construcción de V se sigue que las ecuaciones de HAMILTON así definidas tienen por lo menos una solución. Esto resuelve el problema de la compatibilidad de dichas ecuaciones.

En general, debido a que la 2-forma ω_2 no tiene porqué ser irreducible en todos los puntos de V, estas ecuaciones tendrán más de una solución, lo cual es muy insatisfactorio desde el punto de vista del tipo de *determinismo* que se quiere en dinámica clásica. Esto hace natural plantearse el siguiente problema: ¿se puede modificar en algún sentido la teoría general con el fin de obtener unas ecuaciones de HAMILTON con solución única? Este es el tan llamado problema de las *ligaduras primarias o gauges* del sistema dinámico, al cual vamos a darle una solución intrínseca procediendo como sigue.

Sea rad ω_2 el conjunto de los campos vectoriales $D \in \{D\}$ tales que $i_D\, \omega_2 = 0$. rad ω_2 define sobre V la distribución $P \in V \to \text{rad}\,(\omega_2)_P$ que *supondremos* es totalmente integrable. Entonces, por cada punto $P \in V$ pasa una y sólo una subvariedad integral máxima S_P de rad ω_2. Esto nos permite definir sobre V una relación de equivalencia R diciendo que dos puntos P_1 y P_2 de V son equivalentes si $S_{P_1} = S_{P_2}$. Sea $\overline{V}$ el conjunto cociente de V respecto de R y *supongamos* que $\overline{V}$ está dotado de una estructura diferenciable, respecto de la cual, la proyección canónica $\pi : V \to \overline{V}$ es diferenciable.

TEOREMA 1

H y ω_2 son proyectables por π y la proyección de ω_2 es irreducible en todos los puntos de $\overline{V}$.

DEMOSTRACIÓN

Es evidente, por la construcción de π, que ω_2 es proyectable por π y que su proyección es irreducible en todos los puntos de $\overline{V}$. Vamos a probar que H es también proyectable por π. En efecto, sea X un campo vectorial de V tal que $i_X\, \omega_2 = dH$ (que siempre existe por la construcción de V), entonces, para todo $D \in \text{rad}\ \omega_2$, se tiene:

$$DH = i_D\, dH = i_D\, i_X\, \omega_2 = -\,(i_D\, \omega_2)\, X = 0$$

c.q.d.

Designando ahora por $\overline{H}$ y $\overline{\omega}_2$ las proyecciones sobre la variedad $\overline{V}$ de H y ω_2 respectivamente, obtenemos la siguiente estructura: una variedad diferenciable $\overline{V}$, una función diferenciable $\overline{H}$ de $\overline{V}$ y una 2-forma $\overline{\omega}_2$ de $\overline{V}$ *cerrada* e *irreducible* en todos los puntos de $\overline{V}$. Sobre $\overline{V}$ podemos definir ahora las ecuaciones de HAMILTON de igual forma a como se definieron sobre V por la Definición 3. Por ser $\overline{\omega}_2$ irreducible en todos los puntos de $\overline{V}$ las nuevas ecuaciones tienen una solución única. Esto resuelve el problema que nos habíamos propuesto.

La 2-forma $\overline{\omega}_2$ dota a $\overline{V}$ de una estructura de variedad simpléctica. Los puntos y las funciones de $\overline{V}$ se denominan *estados* y *observables* del sistema dinámico, respectivamente, y las curvas de $\overline{V}$, tangentes al campo vectorial $\overline{D}$ solución única de las ecuaciones de HAMILTON, se denominan *trayectorias* del sistema dinámico.

Llegado aquí, el problema fundamental es ahora: ver qué relación existe entre las ecuaciones de HAMILTON y las secciones transversales estacionarias de la formulación variacional. El Teorema que vamos a enunciar seguidamente tiene por objeto precisar esta relación.

TEOREMA 2 *(o fundamental de la dinámica analítica)*

Sea $\overline{G}$ el grupo uniparamétrico globalmente asociado al campo vectorial $\overline{D}_t$ de $\overline{B}$; $\{D\}_H$ el conjunto de las soluciones de las ecuaciones de HAMILTON del sistema dinámico sobre V; y Γ la distribución sobre $\overline{G}(V)$ generada por el conjunto de campos vectoriales: $\{\overline{G}(D + \overline{D}_t)\}$ donde $D \in \{D\}_H$. Entonces: una condición necesaria y suficiente para que una sección transversal ϕ del fibrado B sea *estacionaria*, es que la imagen de su subida canónica $\overline{\phi}$ sea una curva solución de la distribución Γ(*).

La demostración de este Teorema la vamos a basar en dos Lemas previos.

LEMA 1

$$L_{\overline{D}t}\ \omega_1 = 0$$

DEMOSTRACIÓN

Sea ∇ una ley de derivación en el $A_{\overline{B}}$-módulo $M_{\overline{B}}$ y K la forma de curvatura de ∇. Tomando todas las nociones y cálculos que

(*) Por $\overline{G}$ (V) designamos la subvariedad de $\overline{B}$ que se obtiene aplicando a V todas las transformaciones de $\overline{G}$ y por $\overline{G}$ $(D + \overline{D}_t)$ designamos los campos sobre $\overline{G}$ (V) que se obtienen prolongando los $D + \overline{D}_t$ (sobre V) por el grupo uniparamétrico $\overline{G}$.

dependen de una ley de derivación, respecto de V, tendremos:

$$(1) \quad L_{\overline{D}_t}\omega_1 = L_{\overline{D}_t}(\theta\,\Omega - \mathcal{L}\,dt) = (L_{\overline{D}_t}\theta)\,\Omega + \theta\, L_{\overline{D}_t}\Omega = (A\theta)\,\Omega + \theta\, L_{\overline{D}_t}\Omega$$

pues por ser $\overline{D}_t$ una t.i.c.g. $L_{\overline{D}_t}\theta = A\,\theta$ y por tratarse de un sistema dinámico conservativo $L_{\overline{D}_t}(\mathcal{L}\,dt) = 0$.

Por otra parte, según sabemos, Ω verifica las ecuaciones $i_X\,dt = \Omega$ y $i_X\,d\theta + d\mathcal{L} = F\,\theta$. Aplicando ahora $L_{\overline{D}_t}$ a dichas ecuaciones tendremos:

$$(2) \qquad i_{L_{\overline{D}_t}X}\,dt = L_{\overline{D}_t}\,\Omega$$

$$(3) \qquad i_{L_{\overline{D}_t}X}\,d\theta + i_X L_{\overline{D}_t}\,d\theta = (L_{\overline{D}_t}F)\,\theta + F\,(A\,\theta)$$

Ahora bien:

$$L_{\overline{D}_t}\,d\theta = i_{\overline{D}_t}\,d^2\theta + d i_{\overline{D}_t}\,d\theta = i_{\overline{D}_t}(K \wedge \theta) + d\,(A\,\theta - d i_{\overline{D}_t}\theta) =$$

$$= i_{\overline{D}_t}(K \wedge \theta) + d\,(A\,\theta) - K i_{\overline{D}_t}\theta = (i_{\overline{D}_t}K) \wedge \theta + dA \wedge \theta + A\,d\theta$$

de donde

$$i_X\,L_{\overline{D}_t}\,d\theta = (i_X\,i_{\overline{D}_t}K)\,\theta - (i_{\overline{D}_t}K)\,i_X\,\theta + (i_X\,dA)\,\theta - dA\,i_X\,\theta + A i_X\,d\theta$$

Sustituyendo este resultado en (3) y aplicando la igualdad obtenida a los campos vectoriales D de $\overline{B}$ tales que $p(D) = 0$ (p es la proyección de $\overline{B}$ sobre B que se definió en el 1.1), se verifica, sobre estos campos:

$$i_{L_{\overline{D}_t}X}\,d\theta + A i_X\,d\theta = 0$$

pues las 1-formas θ, dA y $i_{\overline{D}_t}K$ se anulan sobre dichos campos. Pero esto implica, teniendo en cuenta (2), que $L_{\overline{D}_t}\Omega = -\,A\Omega$, y de aquí, sustituyendo en (1), que $L_{\overline{D}_t}\omega_1 = 0$.

c.q.d.

Lema 2

Una condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial D de $\overline{G}(V)$ pertenezca a la distribución Γ es que la restricción a $\overline{G}(V)$ de $i_D\,\omega_2$ sea cero.

DEMOSTRACIÓN

Puesto que ω_2 es invariante por el grupo $\overline{G}$ (por el Lema 1), todo se reduce a probar que $D \in \Gamma_V$ sí y solo sí $i_D\,\omega_2$ se anula sobre los campos vectoriales D' de $\overline{G}(V)$ con soporte sobre V. Sea $D \in \Gamma_V$, entonces $D = \sum_j f_j\,(X_j + D_t)$ donde $X_j \in \{D\}_H$. Entonces:

$$(i_D\,\omega_2)\,D' = \sum_j f_j\,(i_{X_j+D_t}\,\omega_2)\,D' = \sum_j f_j\,[(i_{X_j}\,\omega_2)\,D' + (dH)\,D']$$

Ahora bien, si D' es tangente a V $(i_{X_j}\,\omega_2)\,D' = -\,(dH)D'$, y por tanto $(i_D\,\omega_2)\,D' = 0$; y si $D' = \overline{D}_t$, entonces $(i_{X_j}\,\omega_2)\overline{D}t = -\,(i_{\overline{D}t}\,\omega_2)\,X_j = (dH)\,X_j = \omega_2\,(X_j,\,X_j) = 0$, y por tanto $(i_D\,\omega_2)\,\overline{D}_t = 0$. O sea, $i_D\omega_2$ se anula sobre los campos D' de $\overline{G}(V)$ con soporte sobre V. Recíprocamente, sea D un campo de $\overline{G}(V)$, con soporte sobre V, tal que $i_D\omega_2$ verifica la condición anterior. Entonces $D = X' + f\overline{D}_t$, siendo X' tangente a V. Por tanto, $(i_{X'}\,\omega_2)\,D' + f(dH)D' = 0$ para todo campo D' de $\overline{G}(V)$ con soporte sobre V. Si $f \neq 0$, entonces $X = \frac{1}{f}\,X'$ es una solución de las ecuaciones de HAMILTON, y por tanto $D \in \Gamma_V$; y si $f = 0$, entonces $D \in \operatorname{rad}\,\omega_2$ y, también en este caso, $D \in \Gamma_V$.

c.q.d.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2

Sea img $\overline{\phi}$ la imagen de la subida canónica $\overline{\phi}$ de ϕ a $\overline{B}$ y sean D y D' un campo vectorial de $\overline{B}$ tangente a img $\overline{\phi}$ e incidente con θ y una t.i.c.g. respectivamente. Tendremos:

$$2\,(i_D\,\omega_2)\,D' = 2\,(d\,\omega_1)\,(D, D') = D\,\omega_1\,(D') - D'\,\omega_1\,(D) - \omega_1\,([D, D'])$$

Ahora bien, por la fórmula fundamental de variación, se verifica sobre img $\overline{\phi}$:

$$i_D\,L_{D'}\,(\mathcal{L}\,dt) = \theta\,(D')\,(d\Omega + F\,dt)\,D - i_D\,d\omega_1\,(D')$$

de donde:

$$D\omega_1\,(D') - D'\omega_1\,(D) - \omega_1\,([D, D']) = \theta\,(D')\,(d\Omega + Fdt)D - \\ - \theta\,([D, D'])\,\Omega - D'\,(\theta\,(D)\,\Omega)$$

pero como $\theta(D) = 0$ por hipótesis y $\theta([D, D']) = 0$ por ser $\theta(D) = 0$ y ser D' una t.i.c.g., queda finalmente, sobre img $\overline{\phi}$:

$$2\,(i_D\,\omega_2)\,D' = \theta(D')\,(d\Omega + Fdt)\,D$$

Supongamos que ϕ sea estacionaria. Entonces $(d\Omega + Fdt)D = 0$ y por tanto $(i_D\,\omega_2)\,D' = 0$. Ahora bien, como esto tiene que verificarse para toda t.i.c.g. D', entonces, $i_D\,\omega_2 = 0$ a lo largo de la curva img $\overline{\phi}$. Vamos a ver que esto implica que img $\overline{\phi} \subset \overline{G}(V)$. Sea τ la proyección diferenciable de $\overline{B}$ sobre E^t tal que, para todo número real $\lambda \in R$, $\tau_{\overline{\pi}^{-1}(\lambda)} = \overline{g}_{t-\lambda} \in \overline{G}$. Entonces τ (img $\overline{\phi}$) será una curva de E^t y $\tau(D)$ un campo vectorial sobre E^t tangente a dicha curva. Suponiendo ahora que $\overline{\pi}(D) = \dfrac{\partial}{\partial t}$ (lo cual siempre se puede conseguir sin más que multiplicar D por una función conveniente), vamos a probar que para todo punto $\overline{P} \in \tau$ (img $\overline{\phi}$), $(\tau D)_{\overline{P}}$ es una solución de las ecuaciones de Hamilton del sistema dinámico en el punto $\overline{P}$. En efecto, sea $P = \tau^{-1}(\overline{P})$, $\lambda = \overline{\pi}(P)$ y $D'_p = D_p - (\overline{D}_t)_p$. Por ser $\overline{\pi}(D) = \dfrac{\partial}{\partial t}$ entonces D'_p es vertical y, por la definición de τ, se verifica entonces $(\tau D)_{\overline{P}} = \overline{g}_{t-\lambda} D'_p$. Ahora bien, por ser $i_{Dp}\,(\omega_2)_p = 0$ y ser ω_2 invariante por el grupo $\overline{G}$, entonces $i_{(\tau D)\overline{P}}\,(\omega_2)_{\overline{P}} = -\,(dH)_{\overline{P}}$ sobre E^t; esto es, $(\tau D)_{\overline{P}}$ es solución de las ecuaciones de Hamilton en $\overline{P}$ que es lo que queríamos probar. Entonces τ (img $\overline{\phi}$) es una curva de E^t tangente en cada uno de sus puntos a una solución de las ecuaciones de Hamilton en dicho punto. De aquí se sigue, por la construcción de V, que τ (img $\overline{\phi}$) $\subset V$, lo cual a su vez implica que img $\overline{\phi} \subset \overline{G}(V)$, que es lo que queríamos probar. Llegado aquí, aplicando de nuevo que $i_D\,\omega_2 = 0$ a lo largo de img $\overline{\phi}$, resulta, por el Lema 2, que img $\overline{\phi}$ es una solución de la distribución Γ.

Recíprocamente, supongamos que img $\overline{\phi}$ sea una curva de $\overline{G}(V)$ solución de Γ. Entonces, a lo largo de img $\overline{\phi}$ tendremos $(i_D\,\omega_2)D' = 0$ para toda t.i.c.g. D' tangente a $\overline{G}(V)$. Pero como D es tangente a $\overline{G}(V)$ por hipótesis, esto implica que $(d\Omega + Fdt)D = 0$, o sea, que ϕ sea estacionaria.

c.q.d.

Observación 1

A diferencia de las ecuaciones de Euler-Lagrange, esta caracterización de la estacionaridad en términos de la distribución Γ, no depende de ninguna ley de derivación ∇ en el $A_{\overline{B}}$-módulo $M_{\overline{B}}$.

OBSERVACIÓN 2

Por el Lema 2, la distribución Γ resulta ser el sistema característico del ideal diferencial generado por la restricción a $\overline{G}(V)$ de la 2-forma $\omega_2 = d\omega_1$. Esta caracterización de Γ constituye la expresión intrínseca de la formulación de CARTÁN de la dinámica analítica.

OBSERVACIÓN 3

Por el teorema anterior, el espacio de *los datos de* CAUCHY en el instante inicial t, para las soluciones diferenciables de las ecuaciones de EULER-LAGRANGE, debe estar contenido en la subvariedad V de E^t.

3.2 *Estructura simpléctica y ecuaciones de* HAMILTON *globales de un campo*

En esta sección y la siguiente, vamos a generalizar a la teoría de campos los resultados obtenidos en la sección anterior para la dinámica analítica.

Sea $(B, \mathcal{L})$ un campo sobre una variedad V dotada de un elemento de volumen ω (Definición 1 del n.º 2) y G un grupo uniparamétrico de automorfismos del fibrado $B \xrightarrow{\pi} V$ tal que, el grupo G_0 inducido por G sobre V es un grupo uniparamétrico conexo de automorfismos de V, no dejando fijo ningún punto de V, y que deja invariante el elemento de volumen ω. Sea D_t el campo vectorial definido sobre B por un elemento del álgebra de LIE A_G de G, y $\overline{D}_t$ la subida canónica de D_t a $\overline{B}$.

DEFINICIÓN 4

Diremos que el campo $(B, \mathcal{L})$ es *conservativo* respecto del grupo G cuando se verifique $L_{\overline{D}t}\ (\mathcal{L}\omega) = 0$. Al invariante de E. NOETHER correspondiente a $-D_t \in A_G$ lo llamaremos *densidad hamiltoniana* del campo y lo denotaremos por $\mathcal{H}$.

Por ejemplo, en la teoría relativista de campos usual, donde V es el espacio-tiempo de MINKOWSKI, ω es el elemento de volumen definido por el tensor métrico fundamental y B es un producto directo $V \times E_n$, se supone que los campos $(B, \mathcal{L})$ que se estudian sobre V son conservativos respecto de los grupos uniparamétricos G de automorfismos de B tales que: $G(V \times E_n) = G_0(V) \times E_n$ donde G_0 es un grupo uniparamétrico de translaciones del espacio de MINKOWSKI V.

En lo que sigue supondremos que el campo que se considera es conservativo en el sentido de la definición anterior.

Sea V' una subvariedad de V, de dimensión m-1, y transversal a las trayectorias de G_0 y $\mathfrak{E}$ el espacio vectorial de las secciones transversales σ, a soporte compacto, del fibrado $\overline{B}_{V'}$ (restricción del fibrado $\overline{B} \xrightarrow{\pi} V$ a la subvariedad $V' \subset V$) tales que $\theta_\sigma = 0$. Supondremos que, para toda $\sigma \in \mathfrak{E}$, la restricción de la lagrangiana $\mathcal{L}$ a la imagen de σ es una función de soporte la imagen del soporte (compacto) de σ. Esto nos permite definir sobre el espacio $\mathfrak{E}$ una función real $H_{\mathfrak{E}}$ por la fórmula:

$$H_{\mathfrak{E}}(\sigma) = \int_\sigma \mathcal{H}$$

En la teoría relativista del campo escalar libre la función $\sqrt{H_{\mathfrak{E}}}$ verifica las propiedades de una norma sobre el espacio $\mathfrak{E}$. Nosotros vamos a generalizar este hecho admitiendo que sobre el espacio $\mathfrak{E}$ tenemos definida una norma $\| \;\|$ del tipo siguiente:

$$\| \;\| : \sigma \in \mathfrak{E} \to \sqrt{\int_\sigma \mathcal{H}'}$$

donde $\mathcal{H}'$ es una (m-1)-forma sobre $\overline{B}$. Denotaremos por $\overline{\mathfrak{E}}$ la completación de $\mathfrak{E}$ respecto de dicha norma.

Supondremos que existe una extensión diferenciable de $H_{\mathfrak{E}}$ al espacio de BANACH $\overline{\mathfrak{E}}$. Dicha extensión, que necesariamente es única, la llamaremos *hamiltoniana* del campo y la denotaremos por H.

Por la definición de espacio tangente en un punto a un espacio de Banach, para todo $P \in \overline{\mathfrak{E}}$, el espacio $\mathfrak{E}$ es un subespacio denso del espacio tangente $\overline{\mathfrak{E}}_p$ a $\overline{\mathfrak{E}}$ en P. Cuando $\mathfrak{E}$ sea interpretado de este modo lo denotaremos por $\mathfrak{E}_p$.

LEMA 3

Existe una inyección lineal *canónica* $i_{\mathfrak{E}}$ del espacio $\mathfrak{E}$ en el espacio de los campos vectoriales verticales de $\overline{B}_{V'}$.

DEMOSTRACIÓN

Dada una sección transversal $\sigma \in \mathfrak{E}$, sea $D\sigma$ el campo vectorial de $\overline{B}_{V'}$ definido como sigue: D_σ asigna a cada punto $P \in \overline{B}_{V'}$ el vector

$(D_\sigma)_p$, tangente en P a la fibra de $\overline{B}_{V'}$ que pasa por P, definido por el punto $\sigma(\overline{\pi}(P))$, de dicha fibra, por la condición $(D_\sigma)_p f = f(\sigma\overline{\pi}(P))$ para toda función f de $\overline{B}_{V'}$ lineal sobre las fibras. Es evidente que la aplicación $i_{\mathfrak{E}} : \sigma \in \mathfrak{E} \to D_\sigma$ verifica todas las condiciones del Lema.

c.q.d.

De este modo tenemos en cada punto $P \in \overline{\mathfrak{E}}$ un subespacio $\mathfrak{E}_p$ del espacio tangente $\overline{\mathfrak{E}}_p$ a $\overline{\mathfrak{E}}$ en P, denso en $\overline{\mathfrak{E}}_p$, e inyectado canónicamente por $i_{\mathfrak{E}}$ en el espacio de los campos vectoriales de $\overline{B}_{V'}$.

Dado un punto $\sigma \in \mathfrak{E}$, sea $(\omega_1)_\sigma$ la forma lineal sobre el espacio tangente $\overline{\mathfrak{E}}_\sigma$ definida por la fórmula:

$$(\omega_2)_\sigma (e) = \int_\sigma \theta (D)\Omega \text{ (donde } e \in \mathfrak{E}_\sigma,\ D = i_{\mathfrak{E}}(e))$$

Supondremos que, para todo $\sigma \in \mathfrak{E}$, $(\omega_1)_\sigma$ es continua respecto de la topología de espacio de BANACH de $\overline{\mathfrak{E}}_\sigma$. Entonces, extendiendo $(\omega_1)_\sigma$ a $\overline{\mathfrak{E}}_\sigma$ por continuidad $(\omega_1)_\sigma$ define un elemento del espacio cotangente $\overline{\mathfrak{E}}^*{}_\sigma$. Sea $(\omega_1)_{\mathfrak{E}}$ el campo de diferenciales sobre $\overline{\mathfrak{E}}$ definido por la regla $\sigma \in \mathfrak{E} \to (\omega_1)_\sigma \in \overline{\mathfrak{E}}^*{}_\sigma$. Supondremos que existe una extensión diferenciable de $(\omega_1)_{\mathfrak{E}}$ al espacio de BANACH $\overline{\mathfrak{E}}$. Dicha extensión, que necesariamente es única, define una 1-forma ω_1 sobre $\overline{\mathfrak{E}}$. Sea ω_2 su diferencial exterior $d\omega_1$.

DEFINICIÓN 5

Llamaremos *ecuaciones de* HAMILTON del campo, en un punto $P \in \overline{\mathfrak{E}}$, a la pareja $(\tau_p, (dH)_p)$ de la aplicación lineal $\tau_p : e \in \overline{\mathfrak{E}}_p \to \to i_e (\omega_2)_p \in \overline{\mathfrak{E}}^*{}_p$ y la diferencial $(dH)_p \in \overline{\mathfrak{E}}^*{}_p$. Llamaremos *solución* de dichas ecuaciones a todo vector $e \in \overline{\mathfrak{E}}_p$ tal que $\tau_p (e) = -(dH)_p$.

Vamos a ver ahora de qué modo podemos tratar estas ecuaciones en términos del fibrado $\overline{B}_{V'}$.

TEOREMA 3 (cálculo de dH en un punto $\sigma \in \mathfrak{E}$)

$$(dH)_\sigma (e) = \int_\sigma L_D \mathcal{H}$$

donde $e \in \mathfrak{E}_\sigma$ y $D = i_{\mathfrak{E}} (e)$.

DEMOSTRACIÓN

$$(dH)_\sigma(e) = e(H) = H'_\sigma(e) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[H(\sigma + te) - H(\sigma)]$$

Ahora bien, si $\{\tau_t\}$ es el grupo uniparamétrico generado por el campo vectorial D, tendremos:

$$H(\sigma + te) = \int_{\sigma+te} \mathcal{H} = \int_{\tau t(\sigma)} \mathcal{H} + o(t) = \int_\sigma \tau_t \mathcal{H} + o(t)$$

de donde:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[H(\sigma + te) - H(\sigma)] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[\int_\sigma (\tau_t \mathcal{H}\text{-}\mathcal{H}) + o(t)\right] = \int_\sigma L_D \mathcal{H}$$

c.q.d.

COROLARIO

$$(dH)_\sigma(e) = \int_\sigma i_D\, d\,\mathcal{H}$$

DEMOSTRACIÓN

Sea C una cadena diferenciable (m-1)-dimensional de V' tal que: soporte de $\sigma \subset C$. Tendremos:

$$(dH)_\sigma(e) = \int_\sigma L_D \mathcal{H} = \int_{\sigma(C)} L_D \mathcal{H} = \int_{\sigma(C)} i_D\, d\,\mathcal{H} + d\, i_D\, \mathcal{H} = \int_{D(C)} i_D\, dH +$$

$$\int_{\partial\sigma(C)} i_D\, \mathcal{H} = \int_\sigma i_D\, d\,\mathcal{H}$$

c.q.d.

TEOREMA 4 (cálculo de ω_2 en un punto $\sigma \in \mathbf{E}$)

$$2(\omega_2)_\sigma(e_1, e_2) = \int_\sigma L_{D_1}(\theta(D_2)\Omega) - L_{D_2}(\theta(D_1)\Omega)$$

donde $e_1, e_2 \in \mathbf{E}_\sigma$, $D_1 = i_{\mathbf{E}}(e_1)$ y $D_2 = i_{\mathbf{E}}(e_2)$.

DEMOSTRACIÓN

Sean X_1 y X_2 los campos vectoriales sobre $\bar{\mathbf{E}}$ definidos por las reglas $X_1 : P \in \bar{\mathbf{E}} \to e_1 \in \mathbf{E}_\sigma = \mathbf{E} \subset \bar{\mathbf{E}}_p$, $X_2 : P \in \bar{\mathbf{E}} \to e_2 \in \mathbf{E}_\sigma = \mathbf{E} \subset \bar{\mathbf{E}}_p$. X_1 y X_2 son diferenciables y tales que $[X_1, X_2] = 0$. Entonces:

$$(*) \quad 2(\omega_2)_\sigma (e_1, e_2) = 2\,(d\omega_1)\,(X_1, X_2)\,(\sigma) = e_1\,\omega_1\,(X_2) - e_2\,\omega_1\,(X_1)$$

Procediendo ahora igual que en la demostración del Teorema 3 tendremos:

$$e_1\,\omega_1\,(X_2) = \int_\sigma L_{D_1}\,(\theta\,(D_2)\,\Omega),\ e_2\,\omega_1\,(X_1) = \int_\sigma L_{D_2}\,(\theta\,(D_1)\,\Omega)$$

y sustituyendo en (*) queda probado el Teorema.

c.q.d.

COROLARIO

$$2\,(\omega_2)_\sigma\,(e_1, e_2) = \int i_{D_1}\,i_{D_2}\,(\theta \wedge d\Omega)$$

donde d se toma respecto de cualquier ley de derivación ∇ en el $A_{\bar{B}}$-módulo $M_{\bar{B}}$.

DEMOSTRACIÓN

Suponiendo prolongados D_1 y D_2 a $\bar{B}$ en dos campos vectoriales verticales, tales que $[D_1, D_2] = 0$, y operando respecto de una ley de derivación ∇, tendremos:

$$L_{D_1}\,(\theta\,(D_2)\,\Omega) - L_{D_2}\,(\theta\,(D_1)\,\Omega) = (\nabla_{D_1}\,\theta\,(D_2))\,\Omega + \theta\,(D_2)\,L_{D_1}\,\Omega -$$

$$-\,(\nabla_{D_2}\,\theta\,(D_1))\,\Omega - \theta\,(D_1)\,L_{D_2}\,\Omega = d\theta\,(D_1, D_2)\,\Omega + \theta\,(D_2)\,i_{D_1}\,d\Omega -$$

$$-\,\theta\,(D_1)\,i_{D_2}\,d\Omega = i_{D_1}\,i_{D_2}\,(\theta \wedge d\Omega)$$

pues por ser D_1 y D_2 verticales se tiene $d\theta\,(D_1, D_2) = 0$ y $i_{D_1}\,\Omega =$

$$= i_{D_2}\,\Omega = i_{D_1}\,i_{D_2}\,d\Omega = 0.$$

c.q.d.

Vamos a tratar ahora el problema de la *compatibilidad* y *gauges* de las ecuaciones de HAMILTON del campo, siguiendo el mismo método que fue empleado en dinámica analítica.

Sea $\mathcal{V}_1$ el conjunto de todos los puntos $P \in \bar{\Xi}$ en los cuales las ecuaciones de HAMILTON del campo son compatibles y *supongamos* que $\mathcal{V}_1$ es una subvariedad de $\bar{\Xi}$. Restringiendo H y ω_2 a $\mathcal{V}_1$ podemos definir las ecuaciones de HAMILTON sobre $\mathcal{V}_1$ igual a como se definieron sobre $\mathfrak{E}$ por la Definición 5. Sea $\mathcal{V}_2$ el conjunto de todos los puntos $P \in \mathcal{V}_1$ en los cuales las ecuaciones de HAMILTON sobre $\mathcal{V}_1$ son compatibles y *supongamos* que $\mathcal{V}_2$ es una subvariedad de $\mathcal{V}_1$. Restringiendo H y ω_2 a $\mathcal{V}_2$ podemos definir las ecuaciones de HAMILTON sobre $\mathcal{V}_2$ como anteriormente y continuar el mismo razonamiento. De este modo se obtiene una cadena de subvariedades de $\mathfrak{E}$: $\mathfrak{E} \supseteq \mathcal{V}_1 \supseteq \mathcal{V}_2 \supseteq \ldots$, que supondremos finita. Denotemos por $\mathcal{V}$ la subvariedad final.

Designando por $H_{\mathcal{V}}$ y $(\omega_2)_{\mathcal{V}}$ las restricciones a la subvariedad $\mathcal{V}$ de H y ω_2 respectivamente, obtenemos la siguiente estructura: una variedad diferenciable $\mathcal{V}$ localmente espacio de BANACH, una función diferenciable $H_{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$ y una 2-forma $(\omega_2)_{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$ *cerrada*. Sean $\{D\}$ y $\{\omega\}$ los conjuntos de los campos vectoriales y los campos de diferenciales de $\mathcal{V}$ respectivamente.

DEFINICIÓN 6

Llamaremos *ecuaciones de* HAMILTON del campo, sobre $\mathcal{V}$, a la pareja $(\tau_{\mathcal{V}}, dH_{\mathcal{V}})$ de la aplicación $\tau_{\mathcal{V}}$: $D \in \{D\} \rightarrow i_D\, (\omega_2)_{\mathcal{V}} \in \{\omega\}$ y la 1-forma $dH_{\mathcal{V}} \in \{\omega\}$. Llamaremos *solución* de dichas ecuaciones a todo campo vectorial D tal que $\tau_{\mathcal{V}}\,(D) = -\, dH_{\mathcal{V}}$.

De la construcción de $\mathcal{V}$ se sigue que las ecuaciones de HAMILTON así definidas tienen por lo menos una solución. Esto resuelve el problema de la compatibilidad de dichas ecuaciones.

Para resolver ahora el problema de la *gauges* basta proceder igual que en dinámica analítica, partiendo de $\mathcal{V}$, $H_{\mathcal{V}}$ y $(\omega_2)_{\mathcal{V}}$. De este modo obtenemos la siguiente estructura: una variedad diferenciable $\overline{\mathcal{V}}$ localmente espacio de BANACH, una función diferenciable $\overline{H}$ de $\overline{\mathcal{V}}$ y una 2-forma $\overline{\omega}_2$ de $\overline{\mathcal{V}}$ *cerrada* e *irreducible* en todos los puntos de $\overline{\mathcal{V}}$. Sobre $\overline{\mathcal{V}}$ podemos definir ahora las ecuaciones de HAMILTON del campo de igual forma a como se definieron sobre $\mathcal{V}$ por la Definición 6. Por ser $\overline{\omega}_2$ irreducible en todos los puntos de $\overline{\mathcal{V}}$ las nuevas ecuaciones tienen una solución única.

La 2-forma $\overline{\omega}_2$ dota a $\overline{\mathcal{V}}$ de una estructura de variedad simpléctica. Los puntos y las funciones de $\overline{\mathcal{V}}$ las llamaremos, por analogía con la dinámica analítica, *estados y observables* del campo respectivamente, y las curvas de $\overline{\mathcal{V}}$, tangentes al campo vectorial $\overline{D}$ solución única de las ecuaciones de HAMILTON, las llamaremos *trayectorias* del campo.

3.3 *Ecuaciones de* Hamilton *de un campo y formulación variacional*

Como en dinámica analítica, el problema fundamental es ahora: ver qué relación existe entre las ecuaciones de Hamilton y las secciones transversales estacionarias de la formulación variacional. El objeto de esta sección es generalizar a la teoría de campos el Teorema 2 de la sección 3.1 que resolvía, en dinámica analítica, el citado problema.

Para poder desarrollar la generalización que queremos debemos suponer que la subvariedad V' y el grupo de automorfismos G_0 de V, de la sección 3.2, verifican la siguiente condición: que existe un número real $\varepsilon > 0$ tal que, el conjunto de subvariedades de V: $\{V'_t \mid V'_t = g_t(V'),\ g_t \in G_0,\ |t| < \varepsilon\}$ es un haz de subvariedades transversales a las trayectorias de G_0.

Sea $\overline{G}$ el grupo uniparamétrico globalmente asociado al campo vectorial $\overline{D}_t$ de $\overline{B}$ y consideremos, para cada punto $t \in I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, el espacio vectorial $\mathcal{E}^t$ de las secciones transversales, a soporte compacto, del fibrado $\overline{B}_{V'_t}$ (restricción del fibrado $\overline{B} \xrightarrow{\overline{\pi}} V$ a la subvariedad $V'_t \subset V$) tales que $\theta_{\sigma_t} = 0$.

Lema 4

La aplicación $\tau_t : \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}^t$ definida por el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \overline{B}_{V'} \arrow[r, "\overline{g}_t"] & \overline{B}_{V'_t} \\ V' \arrow[u, "\sigma"] & V'_t \arrow[l, "g_t^{-1}"'] \arrow[u, "\sigma_t"'] \end{tikzcd}$$

donde $\overline{g}_t$ es el elemento único de $\overline{G}$ tal que $g_t \overline{\pi} = \overline{\pi}\, \overline{g}_t$, es un isomorfismo lineal.

Demostración

Basta observar que los elementos de $\overline{G}$ son, por construcción, automorfismos del fibrado $\overline{B} \xrightarrow{\overline{\pi}} V$ que dejan invariante la condición $\theta_\sigma = 0$.

c.q.d.

Sea $\| \ \|_t$ la norma sobre $\mathfrak{E}^t$ obtenida por transporte de la norma $\| \ \|$ de $\mathfrak{E}$ por el isomorfismo τ_t, $\overline{\mathfrak{E}}^t$ la completación de $\mathfrak{E}^t$ respecto de dicha norma y $\overline{\tau}_t$ el isomorfismo de BANACH único de $\overline{\mathfrak{E}}$ sobre $\overline{\mathfrak{E}}^t$ que extiende τ_t. Podemos dotar ahora el conjunto $\overline{B} = \bigcup_{t \in I} \overline{\mathfrak{E}}^t$ de una estructura diferenciable por la condición de que la biyección $\phi : P \in \overline{\mathfrak{E}}^t \subset \overline{B} \to (t, \overline{\tau}_t^{-1}(P)) \in I \times \overline{\mathfrak{E}}$ sea un homeomorfismo diferenciable. El subconjunto $B = \bigcup_{t \in I} \mathfrak{E}^t$ de $\overline{B}$ es, según esta construcción, denso en $\overline{B}$.

Consideremos sobre $I \times \overline{\mathfrak{E}}$ la 1-forma $\tilde{\omega}_1 = -Hdt + \omega_1$, donde H y ω_1 son, respectivamente, la función y la 1-forma sobre $\overline{\mathfrak{E}}$ consideradas en la sección 3.2, y donde dt es la 1-forma canónica sobre el segmento real abierto I. Sea ω_1 la 1-forma sobre $\overline{B}$ obtenida por transporte de $\tilde{\omega}_1$ por el homeomorfismo diferenciable ϕ, y ω_2 la diferencial exterior $d\omega_1$ de ω_1. Como en la sección 3.2, las formas diferenciales así definidas pueden ser calculadas en términos del fibrado $\overline{B}$, como vamos a ver seguidamente.

LEMA 5

Existe una inyección lineal *canónica* i del espacio $R \times \mathfrak{E}$ en el espacio de los campos vectoriales de $\overline{B}$.

DEMOSTRACIÓN

Dado un elemento $(\lambda, \sigma) \in R \times \mathfrak{E}$, sea $D_{(\lambda,\sigma)}$ el campo vectorial sobre $\overline{B}$ definido por la fórmula: $D_{(\lambda,\sigma)} = \lambda \overline{D}_t + D_\sigma$, siendo D_σ la prolongación a $\overline{B}$, por el grupo uniparamétrico $\overline{G}$, del campo vectorial $i_{\mathcal{E}}(\sigma)$ de $\overline{B}_{V'}$, donde $i_{\mathcal{E}}$ es la inyección lineal canónica del Lema 3. Es evidente que la aplicación $i : (\lambda, \sigma) \in R \times \mathfrak{E} \to D_{(\lambda,\sigma)}$ satisface todas las condiciones del Lema.

c.q.d.

De este modo, como, para cada punto $P \in I \times \overline{\mathfrak{E}}$, $R \times \mathfrak{E}$ es un subespacio denso del espacio tangente $(I \times \overline{\mathfrak{E}})_p$ a $I \times \overline{\mathfrak{E}}$ en P, resulta, por transporte por ϕ, que en cada punto $P \in \overline{B}$ tenemos un subespacio B_p del espacio tangente $\overline{B}_p$ a $\overline{B}$ en P, denso en $\overline{B}_p$, e inyectado canónicamente por $i.\phi$ en el espacio de los campos vectorales de $\overline{B}$.

Designando ahora por Θ_m el tensor m-covariante $\theta \otimes \Omega - \mathcal{L}\omega$ de $\overline{B}$, se verifica:

TEOREMA 5 (cálculo de ω_1 en un punto $\sigma_t \in \mathcal{B}$)

$$(\omega_1)_{\sigma_t}(e) = \int_{\sigma_t} \Theta_m(D, \ )$$

donde $e \in \mathcal{B}_{\sigma_t}$ y $D = i.\ \phi(e)$.

TEOREMA 6 (cálculo de ω_2 en un punto $\sigma_t \in \mathcal{B}$)

$$2\,(\omega_2)_{\sigma_t}(e_1, e_2) = \int_{\sigma_t} L_{D_1}(\Theta_m(D_2, \ )) - L_{D_2}(\Theta_m(D_1, \ ))$$

donde $e_1, e_2 \in \mathcal{B}_{\sigma_t}$, $D_1 = i.\phi(e_1)$ y $D_2 = i.\phi(e_2)$.

La demostración de estos teoremas se basa en el siguiente lema previo:

LEMA 6

$$L_{\overline{D}t}\,\Theta_m = 0$$

DEMOSTRACIÓN

Igual que la demostración del Lema 1 (de la sección 3.1) cambiando ω_1 por Θ_m.

c.q.d.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 5

Sea $\phi(e) = (\lambda, \sigma') \in R \times \mathcal{E} \subset (I \times \overline{\mathcal{E}})_{\phi(\sigma t)}$ donde $\phi(\sigma_t) = (t, \sigma) \in I \times \mathcal{E}$. Por ser D y Θ_m invariantes por el grupo $\overline{G}$, por construcción y por el Lema 7, respectivamente, tendremos:

$$\int_{\sigma t} \Theta_m(D, \ ) = \int_{\sigma} \Theta_m(D, \ ) = \int_{\sigma} \Theta_m(\lambda\,\overline{D}_t + D_{\sigma'}, \ ) = -\lambda \int_{\sigma} \mathcal{H} + \int_{\sigma} \theta\,(D_{\sigma'})\,\Omega =$$

$$= [-H(\sigma)\,dt + (\omega_1)_\sigma]\,\phi(e) = (\tilde{\omega}_1)_{\phi(\sigma t)}\,\phi(e) = (\omega_1)_{\sigma t}\,e$$

c.q.d.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 6

Dado un punto $P \in \overline{\mathcal{B}}$, sean $(e_1)_p$ y $(e_2)_p$ los vectores tangentes a $\overline{\mathcal{B}}$ en P definidos por las fórmulas $(e_1)_p = \phi^{-1}_{\phi(P)}\,\phi(e_1)$ y $(e_2)_p = \phi^{-1}_{\phi(P)}(P)\,\phi(e_2)$ (donde $\phi(e_1)$, $\phi(e_2) \in R \times \mathcal{E}$ se consideran como vectores tangentes a $I \times \bar{E}$ en $\phi(P)$). Sean X_1 y X_2 los campos vectoriales sobre $\overline{B}$ definidos por las reglas $X_1 : P \in \overline{B} \to (e_1)_p$ y $X_2 : P \in \overline{B} \to (e_2)_p$. X_1 y X_2 son diferenciables y tales que $[X_1, X_2] = 0$. Entonces:

$$(*) \quad 2\,(\omega_2)_{\sigma t}\,(e_1, e_2) = 2\,(d\omega_1)\,(X_1, X_2)\,(\sigma_t) = e_1\,\omega_1\,(X_2) - e_2\,\omega_1\,(X_1)$$

Procediendo ahora igual que en la demostración del Teorema 3 (de la sección 3.2) teniendo en cuenta el Teorema 6 y el lema 7, obtendremos:

$$e_1\,\omega_1\,(X_2) = \int_{\sigma} L_{D_1}\,(\Theta_m(D_2,\ )),\quad e_2\,\omega_1\,(X_1) = \int_{\sigma} L_{D_2}\,(\Theta_m\,(D_1,\ ))$$

y sustituyendo en (*) queda probado el Teorema.

c.q.d.

A partir de las nociones introducidas podemos generalizar a la teoría de campos el Teorema fundamental de la dinámica analítica como sigue.

TEOREMA 7 (o fundamental de la dinámica de campos)

Sea $\{D\}_H$ el conjunto de las soluciones de las ecuaciones de HAMILTON del campo sobre la variedad $\mathcal{V}$; Γ la distribución, sobre la subvariedad $\phi^{-1}(I \times \mathcal{V})$ de $\overline{B}$, generada por el conjunto de campos vectoriales $\{\phi^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t} + D\right)\}$, donde $D \in \{D\}_H$ y donde $\frac{\partial}{\partial t}$ es el campo vectorial canónico sobre el segmento real abierto I; y U el abierto de la variedad V sobre el que está definido el haz de subvariedades $\{V_t'\}$. Entonces: una condición necesaria y suficiente para que una sección transversal ϕ del fibrado B, a soporte compacto $\subset U$, y de subida canónica a $\overline{B}$, $\overline{\phi}$, sea *estacionaria*, es que la curva: $\{\overline{\phi}_{V'_t} \mid t \in I\}$ de $\overline{B}$ sea solución de la distribución Γ.

Para la demostración de este teorema necesitamos, como en dinámica analítica, el siguiente lema previo.

LEMA 7

Una condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial D de $\phi^{-1}(I \times \mathcal{V})$ pertenezca a la distribución Γ es que la restricción a $\phi^{-1}(I \times \mathcal{V})$ de $i_D\,\omega_2$ sea cero.

DEMOSTRACIÓN

Si $\widetilde{\Gamma}$ es la distribución sobre $I \times \mathcal{V}$ generada por los campos vectoriales $\left\{\frac{\partial}{\partial t} + D\right\}$ donde $D \in \{D\}_H$, y $\tilde{\omega}_2$ es la diferencial exterior $d\tilde{\omega}_1$ de $\tilde{\omega}_1$, todo se reduce a probar que un campo D de $I \times \mathcal{V}$ pertenece a $\widetilde{\Gamma}$ sí y sólo si la restricción a $I \times \mathcal{V}$ de $i_D\, \tilde{\omega}_2$ es cero. Para demostrar esto se procede igual que en la demostración del Lema 2 (sección 3.2).

c.q.d.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL

1. — Vamos a probar, primeramente, que la curva $\{\overline{\phi}_{V'_t} \mid t \in I\}$ de $\overline{B}$ es C^1-diferenciable. Por la construcción de $\overline{B}$, todo se reduce a probar que la función $f\colon t \in I \to \tau_t^{-1}\, \overline{\phi}_{V'_t} \in \overline{\mathcal{E}}$ (donde τ_t es el isomorfismo del Lema 5) es diferenciable. Dado $t \in I$, por la diferenciabilidad de la sección transversal $\overline{\phi}$ del fibrado $\overline{B}$, existe, para todo $x \in V'$, el $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}\, (f(t+h) - f(t))\,(x)$. Sea σ^t la sección transversal del fibrado $\overline{B}_{V'}$ que asigna a cada $x \in V'$ dicho límite. Por ser $\overline{\phi}$ diferenciable, a soporte compacto, y tal que $\theta_{\overline{\phi}} = 0$, esto mismo le ocurre a σ^t, y por consiguiente, $\sigma^t \in \mathcal{E}$. Ahora bien, de la definición de la norma $\|\ \|$ de $\overline{\mathcal{E}}$, se sigue que:

$$\sigma^t = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\,(f(t+h) - f(t))$$

donde el límite se toma respecto de la topología de espacio de BANACH de $\overline{\mathcal{E}}$. Esto prueba la diferenciabilidad de la función f en el punto $t \in I$; y como t es cualquiera, la diferenciabilidad de f.

De la construcción de σ^t se sigue inmediatamente: *a)* que el vector $e_t \in \mathrm{B}_{\overline{\phi}_{V'_t}}$ tal que $\phi\,(e_t) = (1, \sigma^t)$ (donde ϕ es la biyección que define la estructura diferenciable de $\overline{\mathrm{B}}$) es tangente en $\overline{\phi}_{V'_t}$ a la curva $\{\overline{\phi}_{V'_t} \mid t \in I\}$; y *b)* que el campo vectorial $D_t = i.\ \phi\,(e_t)$ de $\overline{B}$ (donde i es la inyección lineal del Lema 6) es tangente a la subvariedad img $\overline{\phi}$ de $\overline{B}$ a lo largo de la subvariedad img $\overline{\phi}_{V'_t} \subset$ img $\overline{\phi}$.

2. — Vamos a calcular ahora $i_{e_t}\, \omega_2$ sobre el subespacio $\overline{\mathrm{B}}_{\phi_{V'_t}}$ de $\overline{\mathrm{B}}_{\overline{\phi}_{V'_t}}$. Sea $x_t \in \mathrm{B}_{\overline{\phi}_{V'_t}}$ y $X_t = i.\ \phi\,(x_t)$. Por el Teorema 7 tendremos, suprimiendo el subíndice t por simplicidad de notación:

$$2\,(i_e\,\omega_2)\,(x) = 2\,\omega_2\,(e,\,x) = \int_{\bar\phi_{V'}} L_D\,(\Theta_m\,(X,\ ))\,-\,L_X\,(\Theta_m\,(D,\ ))$$

Ahora bien, por ser X una t.i.c.g. por construcción, y ser D tan: gente a img $\bar\phi$ a lo largo de img $\bar\phi_{V'}$, aplicando la fórmula fundamental de variación (Teorema 2, sección 2.2) tendremos, sobre img $\bar\phi_{V'}$-

$$i_D\,L_X\,(\mathcal{L}\omega) = \theta\,(X)\,(d\Omega + F\omega)\,(D,\ ) - i_D\,d\,(\Theta_m\,(X,\ ))$$

de donde:

$$L_D\,(\Theta_m\,(X,\ )) - L_X\,(\Theta_m\,(D,\ )) = \theta\,(X)\,(d\Omega + F\omega)\,(D,\ ) +$$

$$+\,di_D\,\Theta_m\,(X,\ ) + i_{[X,D]}\,\mathcal{L}\omega - L_X\,(\theta\,(D)\,\Omega)$$

Ahora bien, por ser D una t.i.c.g. (por la misma razón que lo es X) entonces $L_D\,\theta = A\theta$ y por consiguiente:

$$L_X\,(\theta\,(D)\,\Omega) = (A\theta)\,(D)\,\Omega + \theta\,([X,\,D])\,\Omega + \theta\,(D)\ L_X\,\Omega$$

Teniendo en cuenta ahora: que $\theta\,(D) = 0$ sobre img $\bar\phi_{V'}$ por ser $\theta_{\bar\phi} = 0$; que $[X,\,D] = 0$ por construcción; y que $i_D\,\Theta_m\,(X,) = 0$ fuera de un compacto de img $\bar\phi_{V'}$, por la hipótesis impuesta a la lagrangiana al comienzo de la sección 3.2, resulta finalmente, integrando:

$$2\,(i_{e_t}\,\omega_2)\,(x_t) = \int_{\bar\phi_{V'_t}} \theta\,(X_t)\,(d\Omega + F\omega)\,(D_t,\ )$$

3. — Llegado aquí, estamos en condiciones de probar el Teorema propiamente dicho. Supongamos que ϕ sea estacionaria. Entonces $(d\Omega + F\omega)\,(D_t,\ ) = 0$ sobre img $\bar\phi_{V't}$, y por tanto $(i_{e_t}\,\omega_2)\,(x_t) = 0$. Ahora bien, como esto tiene que verificarse cualesquiera que sean $t \in I$ y $x_t \in B_{\bar\phi_{V'_t}}$, esto implica que $i_{e_t}\,\omega_2 = 0$ a lo largo de la curva $\gamma = \{\phi_{V'_t} \mid t \in I\}$ de $\bar{B}$. Procediendo ahora igual que en la demostración del Teorema 2 de la sección 3.1, resulta entonces que $\gamma \subset \phi^{-1}$ $(I \times V)$ (donde ϕ es la biyección que define la estructura diferenciable de $\bar{B}$). Aplicando ahora de nuevo que $i_{e_t}\,\omega_2 = 0$ a lo largo de γ, resulta, por el Lema 8, que γ es solución de la distribución Γ.

Recíprocamente, supongamos que γ sea una curva de $\phi^{-1}\,(I \times V)$ solución de Γ. Entonces, a lo largo de γ tendremos $(i_{e_t}\,\omega_2)\,(x_t) = 0$ para todo vector x_t tangente a $\phi^{-1}\,(I \times V)$. Pero como e_t es tangente a $\phi^{-1}(I \times V)$ por hipótesis, entonces $(d\Omega + F\omega)\ (D_{t'}\ ) = 0$ sobre img $\overline{\phi}_{V't}$ para todo $t \in I$, lo cual implica que ϕ es estacionaria.

c.q.d.

Las tres observaciones que fueron hechas después del Teorema fundamental de la dinámica analítica pueden también hacerse ahora. La más importante es la segunda observación, la cual nos propor-, ciona una natural generalización a la Teoría de campos de la *formulación* CARTÁN de la dinámica analítica.

3.4 *Ejemplos elementales*

Para ilustrar la teoría general desarrollada en las dos últimas secciones vamos a tratar, sin entrar en detalles de demostración, tres casos particulares notables: los campos escalar, mesónico vectorial y electromagnético libres sobre el espacio-tiempo de MINKOWSKI.

En toda esta sección V va a ser el espacio-tiempo de MINKOWSKI T_2 el tensor métrico fundamental, ω el elemento de volumen definido sobre V por T_2, G el grupo de las isometrías de V y G' el subgrupo de las traslaciones de G. Según es bien sabido, sobre V existen sistemas de coordenadas globales $(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$ (los sistemas inerciales) respecto de los cuales T_2 toma la expresión canónica $\sum_{i=1}^{4} g_{ii}\ dx_i^2$ ($g_{ii} = -1$ para $i = 1, 2, 3$ y $g_{44} = 1$). Dado un tal sistema, los diez campos vectoriales $\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\ g_{ii}\, x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - g_{jj}\, x_j \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ $i,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, constituyen una base del álgebra de LIE A_G de G, y los cuatro campos vectoriales $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ $i = 1, 2, 3, 4$, constituyen una base del álgebra de LIE $A_{G'}$ del subgrupo G' de G. En lo que sigue, siempre que tomemos un sistema de coordenadas locales sobre V lo supondremos inercial.

1. CAMPO ESCALAR LIBRE

El fibrado $B \xrightarrow{\pi} V$ a partir del que se define este campo es el fibrado producto directo $V \times R$ del espacio-tiempo de MINKOWSKI V por la recta real R. Entonces, el A-módulo de las secciones transversales de B coincide en este caso con A.

La lagrangiana $\mathcal{L}$ del campo es la función sobre el fibrado $\overline{B} \xrightarrow{\overline{\pi}} V$ definida por la fórmula:

$$\mathcal{L} : \overline{P} \in \overline{B} \to \frac{1}{2} (df)_x^2 - \frac{1}{2} \mathrm{m}^2 f(x)^2$$

donde $x = \overline{\pi}(\overline{P})$, f es un representante cualquiera de $\overline{P}$ y $(df)_x^2$ es el producto escalar de $(df)_x$ por sí misma según la métrica de MINKOWSKI.

Respecto de un sistema de coordenadas locales canónicas $(x_i\, z\, p_i)$ $\mathcal{L}$ toma la expresión bien conocida:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_i g_{ii}\, p_i^2 - \frac{1}{2} \mathrm{m}^2 z^2$$

El $A_{\overline{B}}$-módulo $M_{\overline{B}}$ coincide en este caso con $A_{\overline{B}}$ y, si se toma en $A_{\overline{B}}$ la ley de derivación ordinaria, todo el cálculo tensorial con valores en $M_{\overline{B}}$ queda reducido al cálculo tensorial ordinario sobre la variedad $\overline{B}$. Así lo supondremos en lo que sigue.

Respecto de un sistema de coordenadas locales canónicas $(x_i\, z\, p_i)$ la 0-forma F y la 3-forma Ω fundamentales toman las expresiones:

$$F = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} - m^2 z$$

$$\Omega = \sum_{i=1}^{4} (-1)^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dxi} \wedge \dots \wedge dx_4 = p_1\, dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 -$$

$$- p_2\, dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + p_3\, dx_1 \wedge dx_2\; dx_4 + p_4\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

A partir de estas formas diferenciales se obtienen, por el proceso desarrollado en la sección 2.3, las ecuaciones de EULER-LAGRANGE (una sola en este caso) correspondientes al campo considerado.

El grupo G lo podemos hacer operar sobre el fibrado $B \xrightarrow{\pi} V$ por automorfismos de fibrado vectorial según la regla:

$$g : (x, \lambda) \in B \to (g(x), \lambda) \in B \quad (g \in G,\ x \in V,\ \lambda \in R)$$

Es fácil comprobar que el campo en cuestión es invariante por este grupo de automorfismos. Los invariantes de E. NOETHER correspondientes definen las bien conocidas nociones de *impulso-energía* y *momento cinético* del campo escalar libre.

Para estudiar la estructura simpléctica consideremos un subgrupo uniparamétrico G_t' del grupo G' de las translaciones de V con trayectorias de género temporal (esto es, que la restricción del tensor métrico T_2 a las trayectorias es definido-positiva). Haciendo operar G_t' sobre B como hemos visto anteriormente nos encontramos en la situación de la teoría general (§ 3.2). La densidad hamiltoniana $\mathcal{H}$ correspondiente, en un sistema de coordenadas locales canónicas $(x_i\ z\ p_i)$ tal que $\frac{\partial}{\partial x_4} = D_t$, toma la expresión:

$$\mathcal{H} = p_4\, \Omega - \mathcal{L}\ dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

Sea ahora V' un hiperplano de V ortogonal a las trayectorias de G_t' y $\mathfrak{E}$ el espacio vectorial de las secciones transversales σ, a soporte compacto, del fibrado $\overline{B}_{V'}$ tales que $\theta_\sigma = 0$.

El espacio $\mathfrak{E}$ puede ser parametrizado procediendo como sigue. Dada $\sigma \in \mathfrak{E}$, sea (f_σ, ψ_σ) la pareja de funciones sobre V' definidas por las condiciones $p\sigma(x) = (x, f_\sigma(x))$ y $\psi_\sigma(x) = -\theta(\overline{D}_t)(\sigma(x))$ (donde $x \in V'$, p es la proyección canónica de $\overline{B}$ sobre B y $\overline{D}_t$ es la subida canónica a $\overline{B}$ de D_t). Por ser σ, C^∞-diferenciable y a soporte compacto, las funciones f_σ y ψ_σ son elementos del espacio vectorial $\mathfrak{D}$ de las funciones C^∞-diferenciables a soporte compacto de V'. De este modo tenemos una aplicación $\sigma \in \mathfrak{E} \to (f_\sigma, \psi_\sigma) \in \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{D}$, que es inmediato comprobar es un isomorfismo lineal y, por consiguiente, una parametrización de $\mathfrak{E}$.

Supongamos que sobre $\mathfrak{E}$ tenemos una norma respecto de la cual se verifican todas las condiciones de la teoría general. En esta hipótesis vamos a estudiar la métrica simpléctica y las ecuaciones de HAMILTON del campo sobre el subespacio denso $\mathfrak{E}$.

Aplicando el Corolario del Teorema 4 (§ 3.2) y pasando a la parametrización $\sigma \longleftrightarrow (f_\sigma, \psi_\sigma)$ de $\mathfrak{E}$ se obtiene:

$$2\,(\omega_2)_\sigma\ (e_1,\ e_2) = \int_{V'} (f_2\, \psi_1 - f_1\, \psi_2)\ \omega_3$$

donde $\sigma \in \mathfrak{E}$, $e_i = (f_i, \psi_i)$ $i = 1, 2$, y ω_3 es el elemento de volumen de V' definido por $-(T_2)_{V'}$.

Se trata de una métrica simpléctica definida e irreducible en todos los puntos de $\mathfrak{E}$. Esta métrica es la propuesta por I. SEGAL en sus trabajos sobre cuantificación de campos escalares (véanse p.e. [12] y [14].

Para obtener ahora las ecuaciones de HAMILTON debemos calcular dH. Aplicando el Corolario del Teorema 3 (§ 3,2) y pasando a la parametrización $\sigma \longleftrightarrow (f_\sigma, \psi_\sigma)$ de $\mathbb{E}$ se obtiene:

$$(dH)_\sigma (e) = \int_{V'} [(m^2 - \Delta) f_\sigma \cdot f + \psi_\sigma \cdot \psi] \, \omega_3$$

donde $\sigma = (f_\sigma, \psi_\sigma)$, $e = (f, \psi)$ y Δ es el operador laplaciana sobre V' respecto de la métrica $-(T_2)_{V'}$.

A partir de aquí se obtiene fácilmente que las ecuaciones de HAMILTON del campo tienen una solución única en todo punto $\sigma \in \mathbb{E}$, que vale:

$$\sigma = (f_\sigma, \psi_\sigma) \rightarrow \frac{1}{2} (\psi_\sigma, (-m^2 + \Delta) f_\sigma)$$

Por otra parte, en este caso hay equivalencia, vía el proceso de la sección 3.3, entre ecuaciones de HAMILTON y ecuaciones de LAGRANGE.

Volviendo ahora al problema de la norma, vamos a ver que a partir de la hamiltoniana H del campo podemos definir sobre $\mathbb{E}$ una norma que verifica todas las condiciones de la teoría general.

Según sabemos, la hamiltoniana H del campo viene definida por la fórmula:

$$H : \sigma \in \mathbb{E} \rightarrow \int_\sigma \mathcal{H}$$

Teniendo en cuenta ahora la expresión de $\mathcal{H}$ anteriormente obtenida y pasando a la parametrización $\sigma \longleftrightarrow (f_\sigma, \psi_\sigma)$ de $\mathbb{E}$, se obtiene:

$$H(\sigma) = \frac{1}{2} \left(\int_{V'} (\sqrt{m^2 - \Delta}\, f_\sigma)^2 \, \omega_3 + \int_{V'} \psi_\sigma^2 \, \omega_3 \right)$$

La función $\sigma \in \mathbb{E} \rightarrow \sqrt{H(\sigma)}$ define obviamente una norma sobre el espacio $\mathbb{E}$. La completación $\overline{\mathbb{E}}$ de $\mathbb{E}$ respecto de esta norma es el espacio de HILBERT $\mathcal{F}' \oplus \mathcal{F}$, donde $\mathcal{F}$ es el espacio de HILBERT de las funciones reales sobre V' de cuadrado integrable respecto de la medida definida por ω_3 y donde $\mathcal{F}'$ es el dominio del operador lineal autoadjunto $\sqrt{m^2 - \Delta}$ de $\mathcal{F}$ dotado del producto escalar $f \cdot f' = \sqrt{m^2 - \Delta}\, f \cdot \sqrt{m^2 - \Delta}\, f'$. Respecto de esta completación es fácil demostrar se verifican todas las condiciones que se imponían en la teoría general. En particular, las prolongaciones de H, ω_2 y dH a la completación $\bar{\mathfrak{E}}$ de $\mathfrak{E}$ se obtienen, simplemente, sustituyendo en las expresiones anteriormente obtenidas las funciones $f \in D$ y $\psi \in D$ por funciones $f \in \mathcal{F}'$ y $\psi \in \mathcal{F}$ respectivamente.

El resultado más importante es que en la completación $\bar{\mathfrak{E}}$ la métrica simpléctica sigue siendo irreducible y las ecuaciones de HAMILTON siguen teniendo una solución única en todo punto de $\bar{\mathfrak{E}}$.

Para terminar nuestro estudio del campo escalar libre vamos a tratar desde nuestro punto de vista el tan llamado problema de la invarianza relativista de la teoría.

Sea D un elemento cualquiera del álgebra de LIE A_G del grupo G y τ_h su grupo uniparamétrico globalmente asociado. Es claro que, para todo $h \in R$, el grupo uniparamétrico $\tau_h G_t' \tau_h^{-1}$ y el hiperplano $\tau_h(V')$ verifican las mismas condiciones que G'_t y V' y, por tanto, puede construirse a partir de ellos toda la teoría anterior. Sean $\bar{\mathfrak{E}}^h$, $\mathfrak{E}^h$, $\omega_2{}^h$ y H^h el espacio de HILBERT, el subespacio denso en este, la métrica simpléctica y la hamiltoniana correspondientes, respectivamente. Por otra parte, puesto que G opera sobre B, D es el mismo tiempo un campo vectorial de B.

Sea $\bar{D}$ la subida canónica de D a $\bar{B}$ y $\bar{\tau}_h$ su grupo uniparamétrico globalmente asociado.

Diremos que la teoría desarrollada es invariante por el grupo G (o relativísticamente invariante) cuando para toda $D \in A_G$ y todo $h \in R$, la aplicación $\bar{\tau}_h : \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}^h$ definida por el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\bar{B}_{V'} \arrow[r, "\bar{\tau}_h"] & \bar{B}_{V'_h} \\
V' \arrow[u, "\sigma"] & V'_h \arrow[l, "\tau_h^{-1}"] \arrow[u, "\sigma_h"']
\end{tikzcd}$$

es una isometría simpléctica que transforma H en H^h.

Puede demostrarse que en el caso que nos ocupa esto es así. Entonces, por la definición que hemos dado de norma, dicha isometría lo es también respecto de la norma y, por consiguiente, puede extenderse unívocamente a la completación $\bar{\mathfrak{E}}$ siguiendo conservando toda la estructura.

2. Campos mesónico vectorial y electromagnético libres

El fibrado $B \xrightarrow{\pi} V$ a partir del que se definen estos campos es el fibrado cotangente T^*_V del espacio-tiempo de Minkowski V. Entonces, el A-módulo de las secciones transversales de B coincide en este caso con el A-módulo de las 1-formas sobre V.

La lagrangiana $\mathcal{L}$ que define estos dos campos es la función sobre el fibrado $\overline{B} \xrightarrow{\overline{\pi}} V$ definida por la fórmula:

$$\mathcal{L}:\ \overline{P} \in \overline{B} \rightarrow -\frac{1}{4}(d\,\omega)_x^2 + \frac{1}{2} m^2\, \omega_x^2$$

donde $x = \overline{\pi}(\overline{P})$, ω es un representante cualquiera de $\overline{P}$ y los cuadrados son en el sentido del producto escalar inducido por la métrica de Minkowski.

Para $m \neq 0$ el campo es el denominado *mesónico vectorial* y para $m = 0$ es el denominado *electromagnético*. Según veremos, hay diferencias esenciales entre estos dos casos desde el punto de vista dinámico. Esto justifica la distinción.

Respecto de un sistema de coordenadas locales canónicas $(x_i\, z_j\, p_{ij})$ $\mathcal{L}$ toma la expresión bien conocida:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\sum_{ij} g_{ii}\, g_{jj}\, (p_{ij} - p_{ji})^2 + \frac{1}{2} m^2 \sum_j g_{jj}\, z_j^2$$

La conexión inducida sobre el fibrado $B \xrightarrow{\pi} V$ por la métrica de Minkowski nos permite definir en el $A_{\overline{B}}$-módulo $M_{\overline{B}}$ una ley de derivación standard. Todos los cálculos posteriores los supondremos efectuados respecto de esta ley de derivación.

Respecto de un sistema de coordenadas locales canónicas $(x_i\, z_j\, p_{ij})$ la o-forma F y la 3-forma Ω fundamentales toman las expresiones:

$$f_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_j} = m^2\, g_{jj}\, z_j$$

$$\Omega_j = \sum_{i=1}^{4}\left(-1\right)^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{ij}}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \hat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_4 = \sum_{i=1}^{4}\left(-1\right)^{i-1}.$$

$$g_{ii}\, g_{jj}\, f_{ij}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \hat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_4 = g_{jj}\,(-f_{1j}\, dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 +$$

$$+ f_{2j}\, dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 - f_{3j}\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 - f_{4j}\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)$$

donde

$$f_{ij} = p_{ij} - p_{ji}.$$

A partir de estas formas diferenciales se obtienen las ecuaciones de EULER-LAGRANGE correspondientes a los campos considerados. En particular, en el caso del campo electromagnético se obtienen las bien conocidas ecuaciones de MAXWELL.

El grupo G opera sobre el fibrado $B = T^*_V$ por automorfismos de fibrado vectorial según la regla

$$g : (x,\ \omega_x) \in T^*_V \rightarrow (g\,(x),\ \omega_x \cdot (dg)_x^{-1}) \in T^*_V\ ,\ (g \in G)$$

Es fácil comprobar que los campos en cuestión son invariantes por este grupo de automorfismos. Los invariantes de E. NOETHER correspondientes definen las nociones de *impulso-energía y momento-cinético* de los campos considerados.

Para estudiar la estructura simpléctica consideremos, como en el ejemplo del campo escalar, un subgrupo uniparamétrico G_t' del grupo G' de las translaciones de V con trayectorias de género temporal. Haciendo operar G_t' sobre B como hemos visto anteriormente, nos encontramos en la situación de la teoría general. La densidad hamiltoniana $\mathcal{H}$ correspondiente, en un sistema de coordenadas locales canónicas $(x_i\ z_j\ p_{ij})$ tal que $\dfrac{\partial}{\partial x_4} = D_t$, toma la expresión:

$$\mathcal{H} = \sum_j p_{4j}\ \Omega_j - \mathcal{L}\ dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

Sea ahora V' un hiperplano de V ortogonal a las trayectorias de G_t' y $\mathfrak{E}$ el espacio vectorial de las secciones transversales σ, a soporte compacto, del fibrado $\overline{B}_{V'}$ tales que $\theta_\sigma = 0$.

El espacio $\mathfrak{E}$ puede ser parametrizado procediendo como sigue. Dada $\sigma \in \mathfrak{E}$ consideremos la cuaterna $(f_\sigma,\ \omega_\sigma,\ \widetilde{f}_\sigma,\ \widetilde{\omega}_\sigma)$ donde f_σ y $\widetilde{f}_\sigma$ son dos funciones y ω_σ y ω_σ son dos 1-formas sobre V' definidas como sigue:

$$f_\sigma\,(x) = (p\sigma\,(x))\ D_t,\ \ (\omega_\sigma)_x = (p\sigma\,(x))_{V'},\ \ \widetilde{f}_\sigma\,(x) = -\ (\theta\ (\overline{D}_t)\ \sigma\,(x))\ D_t,$$

$$(\widetilde{\omega}_\sigma)_x = -\ (\theta\ (\overline{D}_t)\ \sigma\ (x))_{V'}$$

(donde $x \in V'$, p es la proyección canónica de $\overline{B}$ sobre B y $\overline{D}_t$ es la subida canónica a $\overline{B}$ de D_t). Por ser σ, C^∞ diferenciable y a soporte compacto, las funciones f_σ y $\tilde{f}_\sigma$ son elementos del espacio vectorial $\mathcal{D}$ de las funciones C^∞-diferenciables a soporte compacto de V' y las formas ω_σ y $\tilde{\omega}_\sigma$ son elementos del espacio vectorial $\mathcal{D}_1$ de las 1-formas a soporte compacto de V'. De este modo tenemos una aplicación $\sigma \in \mathfrak{E} \to (f_\sigma, \omega_\sigma, \tilde{f}_\sigma, \tilde{\omega}_\sigma) \in \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}_1$ que es inmediato comprobar es un isomorfismo lineal y, por consiguiente, una parametrización de $\mathfrak{E}$.

Suponiendo ahora, como en el ejemplo del campo escalar, que sobre $\mathfrak{E}$ tenemos una norma respecto de la cual se verifican todas las condiciones de la teoría general, vamos a estudiar la métrica simpléctica y las ecuaciones de HAMILTON de los campos en cuestión sobre el subespacio denso $\mathfrak{E}$.

Aplicando el Corolario del Teorema 4 (§ 3,2) y pasando a la parametrización $\sigma \longleftrightarrow (f_\sigma, \omega_\sigma \tilde{f}_\sigma, \tilde{\omega}_\sigma)$ de $\mathfrak{E}$ se obtiene:

$$2\,(\omega_2)_\sigma\,(e^1, e^2) = \int_{V'} [\omega^2 \cdot (\tilde{\omega}^1 - df^1) - \omega^1 \cdot (\tilde{\omega}^2 - df^2)]\;\omega_3$$

donde $\sigma \in \mathfrak{E}$, $e^i = (f^i, \omega^i, \tilde{f}^i, \tilde{\omega}^i)$ $i = 1, 2$, y donde el $\cdot$ indica producto escalar respecto de la métrica $-\,(T_2)_{V'}$.

Respecto de la nueva parametrización $\sigma \longleftrightarrow (f_\sigma, \omega_\sigma, \overline{f}_\sigma, \overline{\omega}_\sigma)$ de $\mathfrak{E}$, donde $\overline{f}_\sigma = \tilde{f}_\sigma$ y $\overline{\omega}_\sigma = \tilde{\omega}_\sigma - df_\sigma$, la métrica simpléctica toma la expresión más sencilla:

$$2\,(\omega_2)_\sigma\;(e^1, e^2) = \int_{V'} (\omega^2 . \overline{\omega}^1 - \omega^1 . \overline{\omega}^2)\;\omega_3$$

En lo que sigue trabajaremos siempre con esta segunda parametrización. En electromagnetismo $-\dfrac{1}{2}\,\omega$ y $\dfrac{1}{2}\,\overline{\omega}$ son el *potencial vector* $\vec{A}$ y el *campo eléctrico* $\vec{E}$ respectivamente.

Para obtener ahora las ecuaciones de HAMILTON debemos calcular dH.

Aplicando el Corolario del Teorema 3 (§ 3,2) y pasando a la parametrización $\sigma \longleftrightarrow (f_\sigma, \omega_\sigma, f_\sigma, \overline{\omega}_\sigma)$ de $\mathfrak{E}$ se obtiene:

$$(dH)_\sigma\,(e) = \int_{V'} [-\,(\delta\overline{\omega}_\sigma + m^2 f_\sigma) \cdot f + ((*d)^2\,\omega_\sigma + m^2\,\omega_\sigma) \cdot \omega +$$
$$+\,(\overline{\omega}_\sigma + df_\sigma) \cdot \overline{\omega}]\;\omega_3$$

donde

$$\sigma = (f_\sigma, \omega_\sigma, \bar{f}_\sigma, \bar{\omega}_\sigma), \; e = (f, \omega, \bar{f}, \omega) \text{ y } * \text{ y } \delta$$

son, respectivamente, el operador *estrella* y la *codiferencial exterior* sobre V'.

Llegado aquí, vamos a analizar separadamente los casos $m \neq 0$ y $m = 0$.

a) $m \neq 0$ (campo mesónico vectorial).

A partir de las fórmulas anteriores se sigue inmediatamente que el conjunto de los puntos de $\mathfrak{E}$ en los que las ecuaciones de HAMILTON son compatibles es el subespacio vectorial $\mathfrak{E}'$ de $\mathfrak{E}$ definido por todos los vectores $(f_\sigma, \omega_\sigma, \bar{f}_\sigma, \bar{\omega}_\sigma)$ de $\mathfrak{E}$ tales que:

$$\delta\bar{\omega}_\sigma + m^2 f_\sigma = 0$$

Restringiendo las ecuaciones de HAMILTON a este subespacio las ecuaciones que resultan son ya compatibles en todos los puntos de dicho subespacio. La cadena de subvariedades de la que hablábamos en la teoría general tiene, pues, en este caso, un solo elemento.

Dado un punto cualquiera $\sigma \in \mathfrak{E}'$, el radical *rad* $(\omega'_2)_\sigma$ de la restricción $(\omega'_2)_\sigma$ a $\mathfrak{E}'$ en σ, de la métrica simpléctica ω_2 es el subespacio vectorial de $\mathfrak{E}_\sigma'$ definido por todos los vectores de la forma $(0, 0, 0, \bar{f})$. La distribución $\sigma \in \mathfrak{E}' \to$ *rad* $(\omega'_2)_\sigma$ sobre $\mathfrak{E}'$ es, trivialmente, totalmente integrable, y el conjunto $\bar{\mathfrak{E}}$ de sus subvariedades integrales máximas es, precisamente, el espacio cociente de $\mathfrak{E}'$ respecto del subespacio $\mathcal{N}$ de $\mathfrak{E}'$ definido por todos los vectores de la forma $(0, 0, 0, \bar{f}_\sigma)$.

La aplicación $\bar{\sigma} \in \bar{\mathfrak{E}} \to (\omega_{\bar{\sigma}}, \bar{\omega}_{\bar{\sigma}}) \in D_1 \oplus D_1)$, donde $\omega_{\bar{\sigma}} = \omega_\sigma$ y $\bar{\omega}_{\bar{\sigma}} = \bar{\omega}_\sigma$ siendo σ un representante cualquiera de la clase $\bar{\sigma}$, es una inmediata parametrización del espacio cociente $\bar{\mathfrak{E}}$. Respecto de esta parametrización, las expresiones de las proyecciones $\bar{H}$, $\bar{\omega}_2$ y $d\bar{H}$ en $\bar{\mathfrak{E}}$ de H, ω_2 y dH sobre $\mathfrak{E}'$, respectivamente, son:

$$\bar{H}(\bar{\sigma}) = \frac{1}{2}\int_{V'} \left[m^2 \omega_{\bar{\sigma}}^2 + (*d\omega_{\bar{\sigma}})^2 + \bar{\omega}_{\bar{\sigma}}^2 + \frac{1}{m^2}(\delta\,\bar{\omega}_{\bar{\sigma}})^2\right] \omega_3$$

$$2\,(\bar{\omega}_2)_\sigma\,(e^1, e^2) = \int_{V'} (\omega^2 \cdot \bar{\omega}^1 - \omega^1 \cdot \bar{\omega}^2)\, \omega_3$$

$$(d\overline{H})_{\bar{\sigma}}(e) = \int_{V'} [((*d)^2\, \omega_{\bar{\sigma}} + m^2\, \omega_{\bar{\sigma}}) \cdot \omega + \left(\bar{\omega}_{\bar{\sigma}} - \frac{1}{m^2}\, d\delta\, \bar{\omega}_{\bar{\sigma}}\right) \cdot \bar{\omega}]\, \omega_3$$

A partir de las dos últimas expresiones es inmediato comprobar que la solución única de las ecuaciones de HAMILTON sobre el espacio cociente $\overline{\mathfrak{E}}$ es:

$$\bar{\sigma} \in \overline{E} \to \frac{1}{2}[\bar{\omega}_{\bar{\sigma}} - \frac{1}{m^2}\, d\,\delta\, \bar{\omega}_{\bar{\sigma}},\ - (*d)^2\, \omega_{\bar{\sigma}} - m^2\, \omega_{\bar{\sigma}}]$$

Finalmente, respecto de la relación entre ecuaciones de HAMILTON y ecuaciones de LAGRANGE en el sentido de la § 3.3, se verifica: que las soluciones de las ecuaciones de LAGRANGE son las soluciones de las ecuaciones de HAMILTON que yacen en el subespacio $\mathfrak{E}''$ de $\mathfrak{E}'$ definido por todos los vectores $(f_\sigma, \omega_\sigma, \bar{f}_\sigma, \bar{\omega}_\sigma)$ de $\mathfrak{E}'$ tales que:

$$\delta\omega_\sigma - \bar{f}_\sigma = 0$$

Esta ecuación es la tan llamada *condición de* LORENTZ que, desde este nuevo punto de vista, adquiere un claro sentido estructural.

b) $m = 0$ (campo electromagnético).

El conjunto de los puntos de $\mathfrak{E}$ en los que las ecuaciones de HAMILTON son compatibles es el subespacio $\mathfrak{E}'$ de $\mathfrak{E}$ definido por todos los vectores $(f_\sigma, \omega_\sigma, \bar{f}_\sigma, \bar{\omega}_\sigma)$ de $\mathfrak{E}$ tales que:

$$\delta\, \bar{\omega}_\sigma = 0$$

Restringiendo las ecuaciones de HAMILTON a este subespacio las ecuaciones que resultan son ya compatibles en todos los puntos de dicho subespacio.

Dado un punto cualquiera $\sigma \in \mathfrak{E}'$, el radical *rad* $(\omega'_2)_\sigma$ de la restricción $(\omega'_2)_\sigma$ a $\mathfrak{E}'$ en σ de la métrica simpléctica ω_2 es el subespacio vectorial de $\mathfrak{E}'_\sigma$ definido por todos los vectores de la forma $(f, d\Phi, o, \bar{f})$. La distribución $\sigma \in \mathfrak{E}' \to$ *rad* $(\omega'_2)_\sigma$ sobre $\mathfrak{E}'$ es totalmente integrable, y el conjunto $\overline{\mathfrak{E}}$ de sus subvariedades integrales máximas es el espacio cociente de $\mathfrak{E}'$ respecto del subespacio $\mathcal{N}$ de $\mathfrak{E}'$ definido por todos los vectores de la forma $(f_\sigma, d\Phi_\sigma, o, \bar{f}_\sigma)$.

La aplicación $\bar{\sigma} \in \overline{\mathfrak{E}} \to (\omega_{\bar{\sigma}}, \bar{\omega}_{\bar{\sigma}}) \in D_1' \oplus D_1''$ donde $\omega_{\bar{\sigma}} = *d\omega_\sigma$

y $\bar{\omega}_{\bar{\sigma}} = \bar{\omega}_\sigma$, siendo σ un representante cualquiera de la clase σ y D_1' el espacio de las 1-formas cocerradas a soporte compacto sobre V', es una inmediata parametrización del espacio cociente $\mathfrak{E}$. En electromagnetismo $-\frac{1}{2}\,\omega_{\bar{\sigma}}$ y $\frac{1}{2}\,\bar{\omega}_{\bar{\sigma}}$ son, respectivamente, el campo magnético $\vec{H}$ y el campo eléctrico $\vec{E}$. Respecto de esta parametrización, las expresiones de las proyecciones $\bar{H}$, $\bar{\omega}_2$ y $d\bar{H}$ en $\bar{\mathfrak{E}}$ de H, ω_2 y dH sobre $\mathfrak{E}'$, respectivamente, son:

$$\bar{H}(\bar{\sigma}) = \frac{1}{2}\int_{V'} (\omega_{\bar{\sigma}}^2 + \bar{\omega}_{\bar{\sigma}}^2)\,\omega_3$$

$$2\,(\bar{\omega}_2)_\sigma\,(e^1,\ e^2) = \int_{V'} [\omega^2 \cdot (*d)^{-1}\ \bar{\omega}^1 - (*d)^{-1}\ \omega^1 \cdot \bar{\omega}^2]\,\omega_3$$

$$(d\bar{H})_{\bar{\sigma}}\,(e) = \int_{V'} (\omega_{\bar{\sigma}} \cdot \omega + \bar{\omega}_{\bar{\sigma}} \cdot \bar{\omega})\,\omega_3$$

A partir de las dos últimas expresiones es inmediato comprobar que la solución única de las ecuaciones de HAMILTON sobre el espacio cociente $\bar{\mathfrak{E}}$ es:

$$\sigma \in \bar{E} \to \frac{1}{2}[(*d)\ \bar{\omega}_{\bar{\sigma}},\ -(*d)\ \omega_{\bar{\sigma}}]$$

o en notación convencional:

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \text{rot}\ \vec{E}, \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\ \text{rot}\ \vec{H},\ \text{div}\ \vec{H} = 0,\ \text{div}\ \vec{E} = 0$$

que son las bien conocidas ecuaciones de MAXWELL en el vacío en términos de los campos eléctrico y magnético.

Para completar el estudio de estos dos campos se debe abordar ahora el problema, esencialmente analítico, de dotar el espacio $\mathfrak{E}$ de una norma que verifique todas las condiciones que se imponían en la teoría general y que además sea compatible (en algún sentido natural) con el problema de la invarianza relativista de la teoría. No nos ocuparemos aquí de este problema por no tenerlo, por el momento, totalmente resuelto.

BIBLIOGRAFIA

1. KOBAYASHI-NOMIZU. — *Foundations of Differential Geometry*, Intercience Publishers, New York, 1962.
2. S. LANG. — *Introduction to Differentiable Manifolds*, Interscience Publishers, New York, 1962.
3. J.L. KOSZUL. — *Lectures on Fibre Bundles and Differential Geometry*, Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960.
4. A. LICHNEROWICZ. — *Theories Relativistes de la Gravitation et de L'électromagnétisme*, Masson et Cie, Paris, 1955.
5. A. LICHNEROWICZ. — *Propagateurs et commutateurs en relativité générale*, Institut des hautes Etudes Scientifiques, Paris, 1961.
6. G. WENTZEL. — *Quantum Theory of Fields*, Interscience Publishers, New York, 1949.
7. BOGOLIOUBOV-CHIRKOV. — *Introduction a la Theorie Quantique des Champs*, Dunod, Paris, 1960.
8. P. WEISS. — *On the Hamilton-Jacobi Theory and quantization of a dynamical continuum*, Proc. Roy. Soc. A., vol. 169, 1938.
9. P.A.M. DIRAC. — *The Hamiltonian form of Field Dynamics*, Can. J. Math. vol. 3, 1951.
10. G. BERGMANN. — *Constraints in Covariant Fields Theories*, Phys. Rev., vol. 83, 1951.
11. J. SCHWINGER. — *The Theory of Quantized Fields (I)*, Phys. Rev., vol. 82, 1951.
12. I. SEGAL. — *Differential operators in the manifold of solutions of a non-linear Differential Equation*, J. Math. Franc, tome XLIV, Fasc. 2, 1965.
13. I. SEGAL. — *Quantization of Nonlinear Systems*, J. of Math. Phys., vol. 1, n.º 6, 1960.
14. I. SEGAL. — *La variété des solutions d'une equation hiperbolique, non linéare d'ordre 2*, College de France, Paris, 1964.